

ĐỀ BÀI

Câu 1: (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{6}{a+2\sqrt{a}}$ và $B = \frac{\sqrt{a}}{a-4} + \frac{2}{2-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}+2}$ với $a > 0, a \neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $a = \frac{1}{9}$.

b) Rút gọn B .

c) Tìm giá trị nguyên của a để B nhận giá trị nguyên.

Câu 2: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$

b) $B = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

c) $C = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{35}} + \frac{1}{\sqrt{35}+\sqrt{36}}$

Câu 3: Giải phương trình

a) $(3\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2) = \sqrt{a}(2+3\sqrt{a})$

b) $\sqrt{9a^2-6a+1} - a = 1$

c) $\sqrt{a^3+a^2+4} + \sqrt{a^3+a^2-3} = 7$

Câu 4: Cho hình bình hành $A'B'C'D'$ có $\widehat{A'} = \alpha < 90^\circ$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B', D' trên đường chéo $A'C'$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của C' trên các đường thẳng $A'B', A'D'$.

a) Chứng minh rằng: Tam giác $B'C'M$ đồng dạng với tam giác $D'C'N$

b) Chứng minh rằng: Tam giác $C'MN$ đồng dạng với tam giác $B'C'A'$

Từ đó suy ra $MN = A'C' \cdot \sin \alpha$

c) Tính diện tích tứ giác $A'NC'M$ biết $B'C' = 6$ cm, $A'B' = 4$ cm và $\alpha = 60^\circ$

d) Chứng minh: $A'C'^2 = A'D' \cdot A'N + A'B' \cdot A'M$.

Câu 5: (0,5 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}+1}$

☞HẾT☞

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

a) Tính giá trị của A khi $a = \frac{1}{9}$.

Thay $a = \frac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) vào A ta được.

$$A = \frac{6}{\frac{1}{9} - 2\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{6}{\frac{1}{9} - \frac{2}{3}} = \frac{54}{7}$$

Vậy $A = \frac{54}{7}$ khi $a = \frac{1}{9}$.

b) Rút gọn B .

$$B = \frac{\sqrt{a}}{a-4} + \frac{2}{2-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}+2} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} - \frac{2}{\sqrt{a}-2} + \frac{1}{\sqrt{a}+2}$$
$$B = \frac{\sqrt{a}-2(\sqrt{a}+2)+(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{\sqrt{a}-2\sqrt{a}-4+\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{-6}{a-4} = \frac{6}{4-a}$$

c) Tìm giá trị nguyên của a để B nhận giá trị nguyên.

Ta có

$$B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{4-a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 : (4-a)$$

$$\Leftrightarrow (4-a) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Leftrightarrow a \in \{5; 3; 6; 2; 7; 1; -2; 10\}$$

Đổi chiều điều kiện ta có $a \in \{5; 3; 6; 2; 7; 1; 10\}$

Vậy $a \in \{5; 3; 6; 2; 7; 1; 10\}$ thì B nhận giá trị nguyên.

Câu 2:

a) $A = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$

$$A = (0,5 - 15 + 1,5) : 13$$

$$A = -13 : 13$$

$$A = -1$$

b) $B = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

$$B = \sqrt{(2\sqrt{2}+3)^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$$

$$B = 2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3$$

$$B = 6$$

c) $C = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{34}+\sqrt{35}} + \frac{1}{\sqrt{35}+\sqrt{36}}$

$$C = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{5-4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{7-6} + \dots + \frac{\sqrt{35}-\sqrt{34}}{35-34} + \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{36-35}$$

$$C = \sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\dots+\sqrt{35}-\sqrt{34}+\sqrt{36}-\sqrt{35}$$

$$C = \sqrt{36} - \sqrt{4}$$

$$C = 6 - 2$$

$$C = 4$$

Câu 3:

$$a) (3\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2) = \sqrt{a}(2 + 3\sqrt{a})$$

Điều kiện: $a \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3a + 6\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2 = 2\sqrt{a} + 3a$$

$$\Leftrightarrow 3a + 6\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2 - 2\sqrt{a} - 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{a} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{a} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{4}{9} \right\}$$

$$b) \sqrt{9a^2 - 6a + 1} - a = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9a^2 - 6a + 1} = 1 + a$$

Điều kiện: $a \geq -1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3a-1)^2} = 1 + a$$

$$\Leftrightarrow |3a-1| = 1 + a$$

Trường hợp 1: $3a-1 = a+1$

$$\Leftrightarrow 3a - a = 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Trường hợp 2: $3a-1 = -(a+1)$

$$\Leftrightarrow 3a - 1 = -a - 1$$

$$\Leftrightarrow 3a - 1 + a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$c) \sqrt{a^3 + a^2 + 4} + \sqrt{a^3 + a^2 - 3} = 7$$

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} a^3 + a^2 + 4 \geq 0 \\ a^3 + a^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Vì $\sqrt{a^3 + a^2 + 4} \neq \sqrt{a^3 + a^2 - 3}$ với mọi a thỏa mãn điều kiện nên nhân liên hợp về trái ta được:

$$\frac{a^3 + a^2 + 4 - (a^3 + a^2 - 3)}{\sqrt{a^3 + a^2 + 4} - \sqrt{a^3 + a^2 - 3}} = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{a^3 + a^2 + 4} - \sqrt{a^3 + a^2 - 3}} = 7$$

Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{a^3+a^2+4}-\sqrt{a^3+a^2-3}=1 \\ \sqrt{a^3+a^2+4}+\sqrt{a^3+a^2-3}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^3+a^2+4}=4 \\ \sqrt{a^3+a^2-3}=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow a^3+a^2-12=0$$

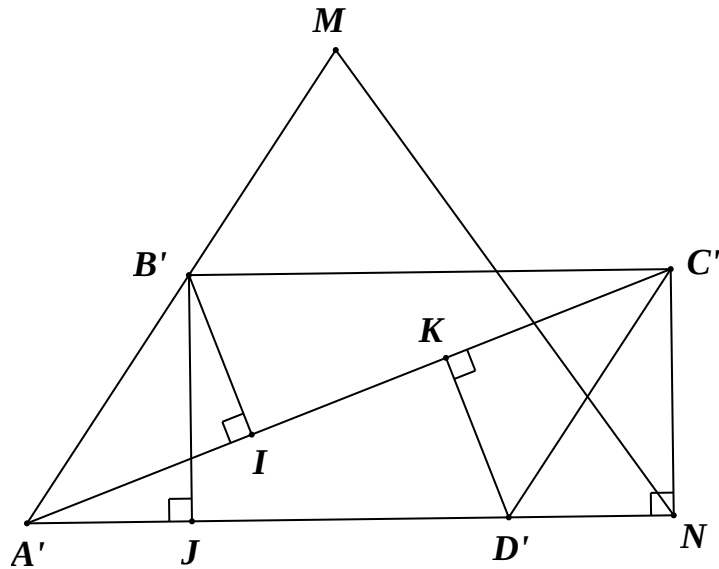
$$\Leftrightarrow (a-2)(a^2+3a+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a^2+3a+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ \left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow a=2$$

Thử lại với $a=2$ thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$

Câu 4:



a) Vì M, N lần lượt là hình chiếu của C' trên các đường thẳng $A'B', A'D'$ nên

$C'M \perp A'M; C'N \perp A'N$. Do đó $\widehat{B'MC'} = 90^\circ; \widehat{D'NC'} = 90^\circ$

Vì $A'B'C'D'$ là hình bình hành nên $B'C' \parallel A'D'; B'C' = A'D'; A'B' \parallel C'D'; A'B' = C'D'$

Vì $B'C' \parallel A'D'$ nên $\widehat{B'A'D'} = \widehat{MB'C'}$ (2 góc đồng vị) (1)

Vì $A'B' \parallel C'D'$ nên $\widehat{B'A'D'} = \widehat{ND'C'}$ (2 góc đồng vị) (2)

Từ (1) (2) suy ra $\widehat{MB'C'} = \widehat{ND'C'}$

Xét $\triangle MB'C'$ và $\triangle ND'C'$ có:

$$\widehat{B'MC'} = \widehat{D'NC'} (= 90^\circ)$$

$$\widehat{MB'C'} = \widehat{ND'C'}$$

$\Rightarrow \triangle MB'C' \cong \triangle ND'C'$ (g - g)

b) Kẻ $B'J \perp A'N (J \in A'N)$

Vì $B'C' \parallel A'D'; B'J \perp A'D$ nên $B'J \perp B'C'$. Do đó $\widehat{JB'C'} = 90^\circ$

Vì $B'C' \parallel A'D'$; $C'N \perp A'N$ nên $C'N \perp B'C'$. Do đó $\widehat{B'C'N} = 90^\circ$

Tứ giác $B'C'NJ$ có

$\widehat{JB'C} = \widehat{B'C'N} = \widehat{C'NA'} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật

$$\Rightarrow B'J = C'N$$

Ta có $\widehat{JB'A'} = \widehat{B'C'M}$ (cùng phụ 2 góc bằng nhau $\widehat{B'A'J} = \widehat{MB'C'}$); $\widehat{JB'C'} = \widehat{B'C'N} (= 90^\circ)$

Suy ra $\widehat{A'B'J} + \widehat{JB'C'} = \widehat{B'C'M} + \widehat{B'C'N}$

$$\Rightarrow \widehat{A'B'C'} = \widehat{MC'N}$$

Vì $\triangle MB'C' \sim \triangle ND'C'$ (câu a) nên

$$\frac{B'C'}{D'C'} = \frac{MC'}{NC'} \Rightarrow \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{MC'}{NC'} \Rightarrow \frac{B'C'}{MC'} = \frac{A'B'}{NC'}$$

Xét $\triangle A'B'C'$ và $\triangle NMC'$ có: $\frac{B'C'}{MC'} = \frac{A'B'}{NC'}$ và $\widehat{A'B'C'} = \widehat{MC'N}$

$$\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle NMC' \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{A'C'}{NM} = \frac{B'C'}{C'M} = \frac{A'B'}{NC'} \quad (3)$$

$$\Rightarrow MN = A'C' \cdot \frac{NC'}{A'B'} = A'C' \cdot \frac{B'J}{A'B'} = A'C' \cdot \sin \alpha$$

c) Xét $\triangle A'JB'$ vuông tại J có:

$$B'J = A'B' \cdot \sin \widehat{B'A'J} = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (cm)};$$

$$A'J = A'B' \cdot \cos \widehat{B'A'J} = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ (cm)};$$

$$\Rightarrow C'N = B'J = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow A'N = A'J + JN = A'J + B'C' = 2 + 6 = 8 \text{ (cm)}$$

$$\text{Từ (3) suy ra } C'M = \frac{B'C' \cdot C'N}{A'B'} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle A'C'N$ vuông tại N ta có:

$$A'C'^2 = A'N^2 + C'N^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 = 64 + 12 = 76 \text{ (cm)}$$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle A'C'N$ vuông tại N ta có:

$$A'C'^2 = A'M^2 + C'M^2 \Rightarrow A'M = \sqrt{A'C'^2 - C'M^2} = \sqrt{76 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{76 - 27} = 7 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle A'C'M} = \frac{MC' \cdot A'M}{2} = \frac{7 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{\triangle A'C'N} = \frac{NC' \cdot A'N}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle A'NC'M} = S_{\triangle A'C'N} + S_{\triangle A'C'M} = 8\sqrt{3} + \frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

d) Vì $A'B' \parallel C'D'$ nên $\widehat{B'A'C'} = \widehat{A'C'D'}$ (2 góc so le trong)

Xét $\triangle A'B'I$ vuông tại I và $\triangle C'D'K$ vuông tại K có:

$$A'B' = C'D' \text{ (cmt)}; \widehat{B'A'C'} = \widehat{A'C'D'}$$

$$\Rightarrow \Delta A'B'I = \Delta C'D'K \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow A'I = KC' \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\Delta D'A'K$ và $\Delta NA'C'$ có:

$$\widehat{A'NC'} = \widehat{D'KA'} (= 90^\circ)$$

$\widehat{NA'C'}$ góc chung

$$\Rightarrow \Delta D'A'K \sim \Delta C'A'N \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow A'C'.A'K = A'D'.A'N$$

Xét $\Delta B'A'I$ và $\Delta MA'C'$ có:

$$\widehat{A'MC'} = \widehat{A'IB'} (= 90^\circ)$$

$\widehat{MA'C'}$ góc chung

$$\Rightarrow \Delta B'A'I \sim \Delta C'A'M \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow A'C'.A'I = A'B'.A'M$$

$$\text{Ta có: } A'B'.A'M + A'D'.A'N = A'C'.A'K + A'C'.A'I$$

$$= A'C'.(A'K + A'I) = A'C'.(A'K + KC')$$

$$= A'C'.A'C' = A'C'^2 \text{ (đpcm)}$$

Câu 5:

$$\text{Ta có } P = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - 3a + 3\sqrt{a} + 4}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{a} = t, (t \geq 0) \Rightarrow a = t^2, a\sqrt{a} = t^3$$

$$\text{Ta có } P = \frac{t}{t^3 - 3t^2 + 3t + 4}$$

$$* \text{ TH1: } t = 0 \Rightarrow P = 0$$

$$* \text{ TH2: } t > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{t^2 - 3t + 3 + \frac{4}{t}} = \frac{1}{(t-2)^2 + \left(t + \frac{4}{t}\right) - 1}$$

$$\text{Ta có } (t-2)^2 \geq 0, \forall t \text{ và } t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 4 \text{ (theo bất đẳng thức Cô si)}$$

$$\text{Nên } P \leq \frac{1}{0+4-1} = \frac{1}{3}$$

$$* P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)^2 = 0 \\ t = \frac{4}{t} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \text{ (nhận)} \Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 4$$