

Bài 1: (1,5 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{5^2 + 12^2}$

b) $B = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $D = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 2} - \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} - 2}$

Bài 2: (1,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} = 9$

b) $\sqrt{x^2 - 9} - x + 3 = 0$

c) $(x+2)(x+3) - 2\sqrt{x^2 + 5x + 3} = 6$

Bài 3: (3,0 điểm)

Cho $A = \frac{-3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} - 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

b) Chứng minh $B = \frac{-3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

c) Tìm x để $B > -3$ d) Với $x > 9$, đặt $P = \frac{A}{B}$, so sánh P và 1.**Bài 4:** (3,5 điểm)

1. Tòa nhà Burj Khalifa (Các tiểu vương quốc Ả Rập thống nhất) được khánh thành ngày 4/1/2010 là một công trình kiến trúc cao nhất thế giới. Khi tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 37° thì bóng của tòa nhà trên là 1098,79m. Tính chiều cao của tòa nhà (kết quả cuối cùng được làm tròn đến phần nguyên, các kết quả khác được làm tròn hai chữ số thập phân).

2. Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AC$ tại F .

a) Cho $HC = 16$ cm, $HB = 9$ cm. Tính AB, AC, AH .

Lưu ý: các số liệu này chỉ được dùng cho câu a.

b) Chứng minh $AB \cdot AE = AF \cdot AC$ và $HF = \frac{AB \cdot AC^2}{BC^2}$.

c) Chứng minh $BE^2 + CF^2 \geq EF^2$. Khi nào dấu bằng xảy ra?**Bài 5:** (0,5 điểm)Cho $a, b, c \geq 0$ và thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$. Chứng minh $ab + bc + ca \leq 3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. a) $A = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$
 b) $B = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}.\sqrt{3} + \sqrt{2}.\sqrt{2} - \sqrt{3}.\sqrt{3} + \sqrt{3}.\sqrt{2}$

$$= \sqrt{6} + 2 - 3 + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 1$$

 c) $D = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$

$$= \frac{5 - \sqrt{5} - 2 - (5 + \sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = -2\sqrt{5}$$

Câu 2. (a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} = 9$ (ĐK: $x \geq 1$)
 $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{4(x-1)} = 9$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} = 9$
 $\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 9$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3$
 $\Rightarrow x-1 = 9$
 $\Leftrightarrow x = 10$ (tm)
 Vậy phương trình có nghiệm: $x = 10$
 b) $\sqrt{x^2-9} - x + 3 = 0$ (ĐK: $x \geq 3$)
 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} = x-3$
 $\Leftrightarrow x^2-9 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-9 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$ (tm)
 Vậy phương trình có nghiệm: $x = 3$
 c) $(x+2)(x+3) - 2\sqrt{x^2+5x+3} = 6$ (ĐK: $x^2+5x+3 \geq 0$)
 $\Leftrightarrow x^2+5x+6 - 2\sqrt{x^2+5x+3} - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^2+5x+3 - 2\sqrt{x^2+5x+3} + 1) - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5x+3} - 1)^2 - 2^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5x+3} - 1 + 2)(\sqrt{x^2+5x+3} - 1 - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5x+3} + 1)(\sqrt{x^2+5x+3} - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+3} - 3 = 0 \quad (\sqrt{x^2+5x+3} + 1 > 0)$
 $\Leftrightarrow x^2+5x+3 = 9$
 $\Leftrightarrow x^2+5x-6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+6) - (x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \quad (tm) \\ x=-6 \quad (tm) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=-6$

Câu 3. a) Thay $x=16$ (tmdk) vào $A = \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{-3.4+1}{4-3} = -11$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3\sqrt{x}-2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3-3x+6\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3-3x+6\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{-3x+10\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(-3\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } B > -3 \Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{x}+1+3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện: $0 \leq x < 4$

$$\text{d) } P = \frac{A}{B} = \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} : \frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Xét } P-1 = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Với } x > 9 \text{ thì } \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow P-1 < 0 \Leftrightarrow P < 1$$

Câu 4. 1.

Theo đề bài ta có hình vẽ.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \text{ (hệ thức lượng trong tam giác}$$

vuông)

$$\Rightarrow \tan 37^\circ = \frac{AC}{1098,79} \Rightarrow AC = 1098,79 \cdot \tan 37^\circ$$

$$\Rightarrow AC = 828 \text{ m}$$

Vậy tòa nhà cao 828m.

2.

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, chiều cao AH ta có $AH^2 = BH \cdot CH$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow AH^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \text{ (định lý Pytago)}$$

$$\Rightarrow 12^2 + 9^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 225 \Rightarrow AB = 15 \text{ cm}$$

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H có $AH^2 + CH^2 = AC^2$ (định lý Pytago)

$$\Rightarrow 12^2 + 16^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 400 \Rightarrow AC = 20 \text{ cm}$$

b)

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, chiều cao HE ta có: $AH^2 = AE \cdot AB$ (hệ thức lượng trong tam giác) (1)

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H, chiều cao HF ta có: $AH^2 = AF \cdot AC$ (hệ thức lượng trong tam giác) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (đpcm)

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H, chiều cao HF ta có: $HF \cdot AC = HA \cdot HC \Rightarrow HF = \frac{HA \cdot HC}{AC}$

$$\text{Mà } HA = \frac{AB \cdot AC}{BC} \text{ và } HC = \frac{AC^2}{BC}$$

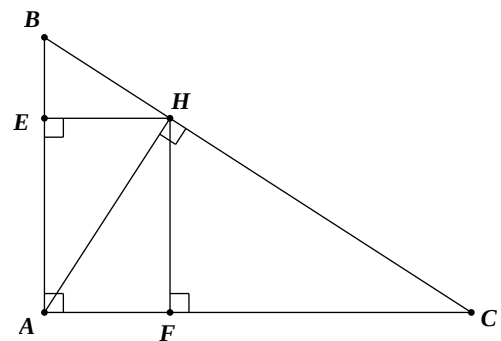
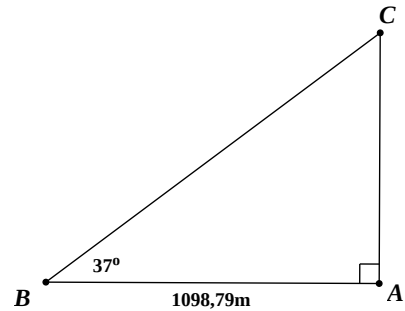
$$\Rightarrow HF = \frac{\frac{AB \cdot AC}{BC} \cdot \frac{AC^2}{BC}}{AC} = \frac{\frac{AB \cdot AC^3}{BC^2}}{AC} = \frac{AB \cdot AC^2}{BC^2} \text{ (đpcm)}$$

c) Ta chứng minh bổ đề: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ad = bc$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Áp dụng vào bài toán ta có: $(BE^2 + CF^2)(AE^2 + AF^2) \geq (BE \cdot AE + CF \cdot AF)^2$

$$\Leftrightarrow (BE^2 + CF^2) \cdot EF^2 \geq (HE^2 + HF^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (BE^2 + CF^2) \cdot EF^2 \geq EF^4$$

$$\Leftrightarrow BE^2 + CF^2 \geq EF^2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$

$$\text{Mà } \frac{BE}{AE} = \frac{BH}{CH}; \frac{CF}{AF} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{CH}{BH} \Leftrightarrow BH^2 = CH^2 \Leftrightarrow BH = CH$$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BC.

Câu 5. Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ac}$$

$$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Lại có:

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (ab + bc + ca)(a + b + c)$$

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) \leq \frac{9}{8}(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 9$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{9}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3\sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 3$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

☞ HẾT ☞