

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 4}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{5}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \geq 0, x \neq 1$)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{9}{4}$.

2) Chứng minh: $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$.

3) Cho $P = A.B$. So sánh P và $|P|$

Câu 2. (2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Một công ty vận tải dùng 1 số xe chở hàng theo một hợp đồng. Theo kế hoạch, mỗi xe phải chở 2 tấn hàng. Nhưng thực tế có 2 xe phải điều động đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 1 tấn hàng nữa so với kế hoạch thì mới hoàn thành được hợp đồng. Hỏi số xe lúc đầu công ty dùng là bao nhiêu xe?

Câu 3. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = 3\sqrt{x} - 2$.

b) $\sqrt{x^2 - 25} - 8 = 4\sqrt{x - 5} - 2\sqrt{x + 5}$.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC , ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

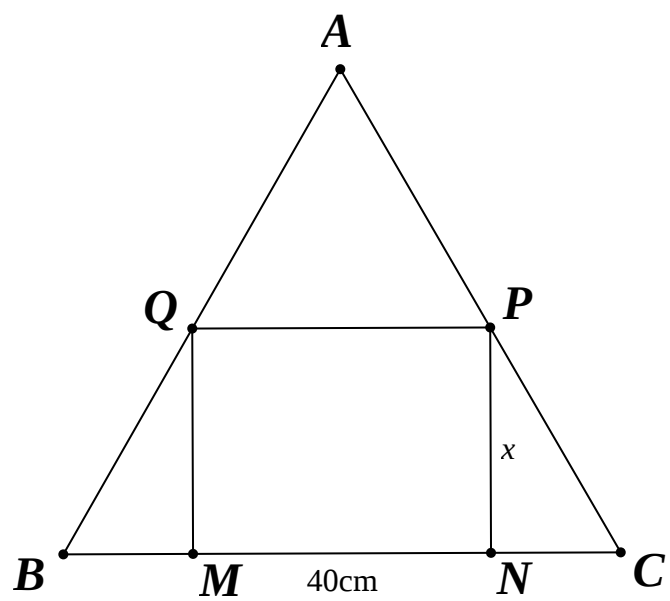
1) Chứng minh: A, M, N, H cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Từ đó suy ra $\triangle AMN \sim \triangle ACB$

3) Gọi AH cắt MN tại O . Chứng minh: $OA \cdot OH = OM \cdot ON$.

4) Đường tròn ngoại tiếp tam giác HON cắt BC tại P (P khác H). Chứng minh $OP \parallel MH$.

Câu 5. (0,5 điểm) Để chào mừng Kì niệm 35 năm thành lập trường THCS Nghĩa Tân, Ban tổ chức trường tổ chức Hội trại giữa các khối lớp. Bạn C có một tấm bìa hình tam giác đều cạnh 40 cm và muốn tận dụng miếng bìa trên để cắt thành một hình chữ nhật làm bảng menu cho gian hàng lớp mình (như hình vẽ). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất mà bạn C có thể cắt được bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



3HET8

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. 1) Ta có $x = \frac{9}{4}$ (Thỏa mãn ĐK), thay vào biểu thức A suy ra

$$A = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\frac{9}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} + 2}{\sqrt{\frac{9}{4}} - 1} = 22.$$

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{\sqrt{x} - 4}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{5}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{5}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{5(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 4 - 5\sqrt{x} + 5 + x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$3) \text{ Ta có } P = AB = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}.$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 > 0, x - \sqrt{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P = |P|.$$

Câu 2. Gọi số xe lúc đầu công ty dùng là x (xe) ($x \in \mathbb{Z}, x > 2$)

Theo kế hoạch mỗi xe chở 2 tấn suy ra khối lượng hàng mà công ty phải chở là: $2x$ (tấn)

Thực tế số xe sử dụng là: $x - 2$ (xe)

Khối lượng hàng thực tế đoàn xe công ty chở là: $3(x - 2)$ (tấn)

Vì công ty hoàn thành được hợp đồng nên ta có PT: $2x = 3(x - 2) \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy số xe lúc đầu công ty dùng là 6 (xe).

Câu 3. a) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = 3\sqrt{x} - 2.$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = 3\sqrt{x} - 2 \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x - 7\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{3} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $S = \left\{ \frac{1}{9}; 4 \right\}$

$$\text{b) } \sqrt{x^2 - 25} - 8 = 4\sqrt{x - 5} - 2\sqrt{x + 5} \quad (x \geq 5)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 5)(x + 5)} - 4\sqrt{x - 5} - 8 + 2\sqrt{x + 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 5}(\sqrt{x + 5} - 4) + 2(\sqrt{x + 5} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x + 5} - 4)(\sqrt{x - 5} + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 5} = 4 \\ \sqrt{x + 5} = -2 \end{cases}$$

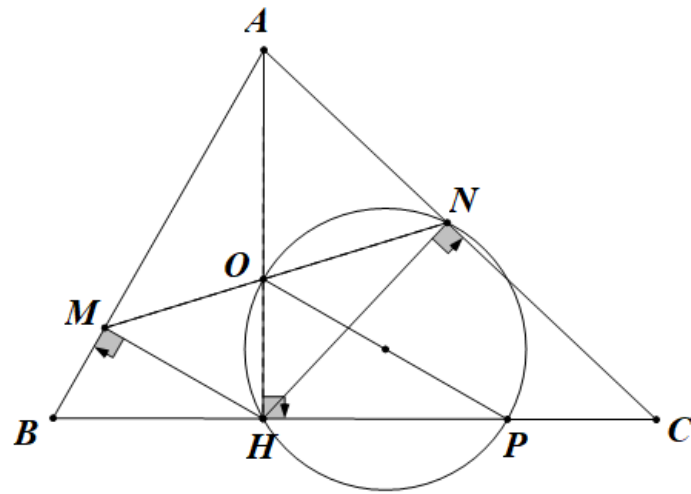
Mà $\sqrt{x + 5} = -2$ vô lý nên $\sqrt{x + 5} = 4$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $S = \{11\}$

Câu 4.



Vì M và N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Nên $\widehat{ANH} = 90^\circ$ và $\widehat{AMH} = 90^\circ$ (tính chất)

Xét tam giác AMH có $\widehat{AMH} = 90^\circ$ nên tam giác AMH vuông tại M .

Do đó A, M, H thuộc đường tròn đường kính AH (1)

Xét tam giác ANH có $\widehat{ANH} = 90^\circ$ nên tam giác ANH vuông tại N .

Do đó A, N, H thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (2) và (1) ta có: A, M, N, H cùng thuộc một đường tròn, đường kính AH .

b) Xét tam giác vuông AHB có MH là đường cao (gt) $\Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (3)

Xét tam giác vuông AHC có MH là đường cao (gt) $\Rightarrow AH^2 = AN \cdot AC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (4)

Từ (3) và (4) ta có: $AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$ (tính chất tỉ lệ thức)

Xét tam giác AMN và tam giác ACB có:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \text{ (chứng minh trên)}$$

Và góc A chung

Nên $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (c.g.c)

c) Vì $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{AMN} + \widehat{OMH} = 90^\circ$

$$\widehat{ACB} + \widehat{OAN} = 90^\circ$$

Nên $\widehat{OMH} = \widehat{OAN}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Xét tam giác OMH và tam giác OAN có:

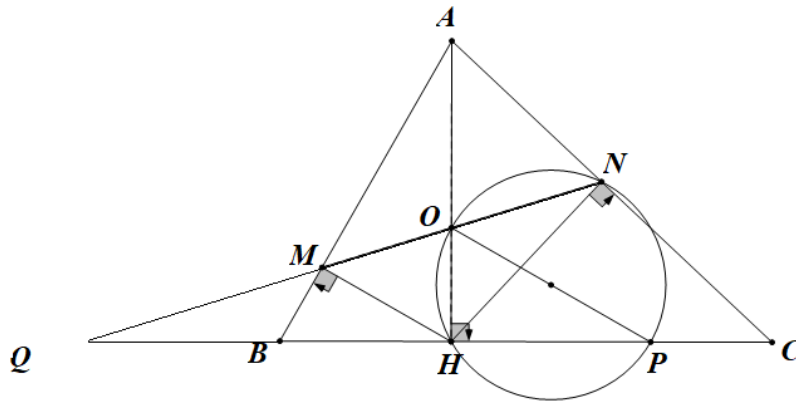
$$\widehat{OMH} = \widehat{OAN} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{MOH} = \widehat{AON} \text{ (đối đỉnh)}$$

Nên $\triangle OMH \sim \triangle OAN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{OH}{ON} \text{ (tỉ số đồng dạng)}$$

Vậy $OA \cdot OH = OM \cdot ON$ (đpcm)



Kẻ MN cắt BC tại Q .

Xét tam giác QOH và QPN có:

Góc Q chung.

$$\widehat{QHO} = \widehat{QNP} (= 90^\circ)$$

$$\text{Vậy } \triangle QHO \sim \triangle QNP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{QO}{QH} = \frac{QP}{QN} \text{ (tỉ số đồng dạng)}$$

$$\Rightarrow \frac{QO}{QP} = \frac{QH}{QN} \text{ (tính chất tỉ lệ thức)}$$

Xét tam giác QOP và QHN có:

Góc Q chung.

$$\frac{QO}{QP} = \frac{QH}{QN} \text{ (chứng minh trên)}$$

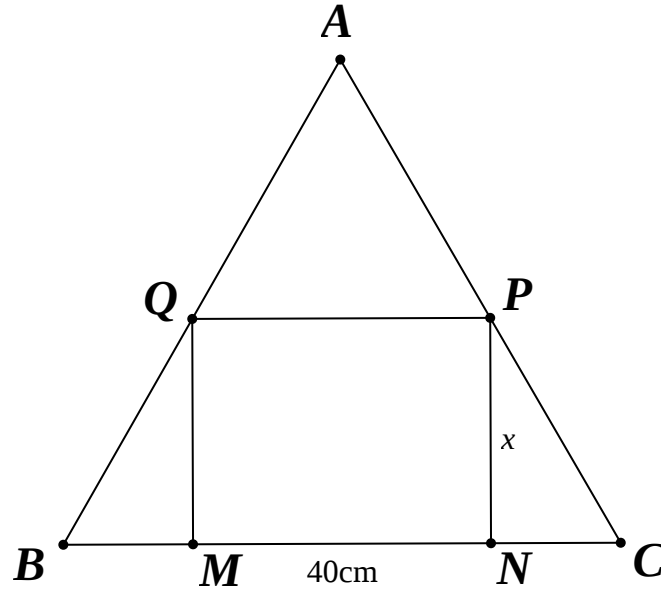
Nên $\triangle QOP \sim \triangle QHN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{QNH} = \widehat{QPO}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{ONH} + \widehat{ANM} = 90^\circ$; $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$; $\widehat{ABH} + \widehat{MHB} = 90^\circ$

Nên $\widehat{MHB} = \widehat{OPH}$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $OP \parallel MH$

Câu 5.



Gọi độ dài của cạnh PN là x ($0 < x < 40$).

Xét tam giác PCN vuông tại N và $\widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow CN = \frac{PN}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó ta có $MN = 40 - 2 \cdot PN = 40 - \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích bằng

$$\begin{aligned} S &= MN \cdot PN = \left(40 - \frac{2x}{\sqrt{3}}\right) \cdot x = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x^2 - 20\sqrt{3}x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x^2 - 20\sqrt{3}x + 300) + 200\sqrt{3} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - 10\sqrt{3})^2 + 200\sqrt{3} \leq 200\sqrt{3} \simeq 346,41(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

Suy ra diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất là $346,41(\text{cm}^2)$, khi $x = 10\sqrt{3}$.

☞ HẾT ☞