

Bài 1: (2,0 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{98} - \sqrt{18}$.

b) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

c) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - (2+\sqrt{3})$.

Bài 2: (2,5 điểm).

Cho: $P = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}$ và $Q = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}+1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$ với

$a > 0; a \neq 1; 4$

a) Tính giá trị của P tại a thỏa mãn $a - 5\sqrt{a} + 6 = 0$.

b) Rút gọn Q .

c) Tìm a nguyên để $\frac{4Q}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 3: (1,5 điểm). Giải các phương trình vô tỉ sau

a) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \sqrt{3x-12}$.

b) $\sqrt{2x+27} - 6 = x$.

Bài 4: (3,5 điểm)

1. Cho tam giác vuông ABC ($AB > AC$), có đường cao AH .

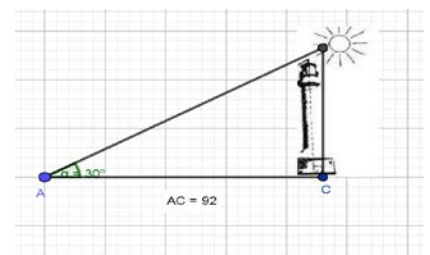
a) Chứng minh rằng $\frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH}$.

b) Biết $\widehat{C} = 60^\circ$, $AC = 8$ cm, $AB = 12$ cm. Giải tam giác vuông HAB .

c) Kẻ AF là phân giác của $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin \widehat{ACH}$.

Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{2}}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

2. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 30° và bóng của một tháp trên mặt đất dài 92 m. Tính chiều cao của tháp. (Kết quả làm tròn đến số thập phân thứ 2).



Bài 5: (0,5 điểm)

Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z)$

❧HẾT❧

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{98} - \sqrt{18} \\ &= 2\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{49 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} \\ &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5} + \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5} \\ &= \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} \\ &= |3 + \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| \\ &= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - (2 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{1 + \sqrt{2}} - (2 + \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{Ta có } a - 5\sqrt{a} + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) - 3(\sqrt{a} - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 2 = 0 \\ \sqrt{a} - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \text{ (loại) hoặc } a = 9 \text{ (thỏa mãn).}$$

Thay $a = 9$ vào biểu thức P , ta được

$$P = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-1} = 4.$$

Vậy $P = 4$ tại $a - 5\sqrt{a} + 6 = 0$.

b) Với $a > 0; a \neq 1; 4$

$$\begin{aligned} Q &= \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}+1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}+1)} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right] : \left(\frac{\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Vậy $Q = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$ với $a > 0; a \neq 1; 4$.

c) Với $a > 0; a \neq 1; 4$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{4Q}{P} &= \frac{4(\sqrt{a}+1)}{2\sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} \\ \Rightarrow \frac{4Q}{P} &= \frac{2\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}} = 2 - \frac{4}{\sqrt{a}} \\ \frac{4Q}{P} \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{a}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{a} \in U(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}. \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{a} > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow a \in \{1, 4, 16\}$

Mà $a > 0; a \neq 1; 4 \Rightarrow a = 16$ (TM)

Câu 3. a) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \sqrt{3x-12}$. Điều kiện $x \geq 5$.

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - \sqrt{x-5} = \sqrt{3x-12}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} = \sqrt{3x-12}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-5) = 3x-12$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ (t/m)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{8\}$.

b) $\sqrt{2x+27} - 6 = x$. Điều kiện $x \geq -\frac{27}{2}$.

PT $\Leftrightarrow \sqrt{2x+27} = x+6$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ 2x+27 = (x+6)^2 \quad (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 2x+27 = x^2 + 12x + 36$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 9x + 9 = 0$

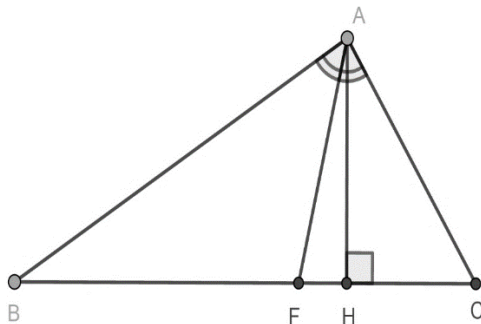
$\Leftrightarrow x(x+1) + 9(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+9) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1(tm) \\ x=-9(ktm) \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1\}$.

Câu 4.



a) Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao của tam giác

$\Rightarrow \begin{cases} AC^2 = CH \cdot BC \\ AB^2 = BH \cdot BC \end{cases}$.(Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH} = BC$.

$\Rightarrow \frac{AB^2}{BH} = \frac{AC^2}{CH}$ (Điều phải chứng minh)

b) Tam giác ABC vuông tại A ta có:

$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + 60^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Tam giác ABH vuông tại H ta có:

$\widehat{ABH} + \widehat{HAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AH}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 6 \text{ cm}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{BH}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$c) S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CF \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ ta có: } AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin \widehat{ACH}$$

$$\text{Ta có: } S_{ACB} = S_{AFB} + S_{AFC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} AB \cdot AF \cdot \sin \widehat{BAF} + \frac{1}{2} AC \cdot AF \cdot \sin \widehat{CAF}$$

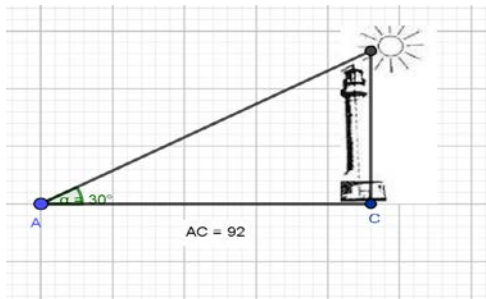
$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot AF \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} AC \cdot AF \cdot \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AF \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} AC \cdot AF \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2AB \cdot AC = AB \cdot AF \cdot \sqrt{2} + AC \cdot AF \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Chia cả 2 vế của đẳng thức cuối cùng cho } \sqrt{2} \cdot AB \cdot AC \cdot AF \text{ ta được: } \frac{\sqrt{2}}{AF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

2.



Gọi chiều cao của tháp là h (m)

Bóng của tháp trên mặt đất là b (m) $\Rightarrow b = 92$ m

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{92} \Rightarrow h = \frac{92}{\sqrt{3}} \approx 53,12$$

Vậy chiều cao của tháp là 53,12 m

Câu 5. (0,5 điểm)

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Lời giải

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z) \quad (1)$$

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -2009 \\ z \geq 2010 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010}) = x + y + z \\ &\Leftrightarrow (x-2-2\sqrt{x-2}+1) + (y+2009-2\sqrt{y+2009}+1) + (z-2010-2\sqrt{z-2010}+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)^2 + (\sqrt{y+2009}-1)^2 + (\sqrt{z-2010}-1)^2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (\sqrt{x-2}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{y+2009}-1)^2 \geq 0 \text{ nên} \\ (\sqrt{z-2010}-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-2}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{y+2009}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{z-2010}-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2008 \\ z = 2011 \end{cases} \quad (\text{tmdk}).$$

Vậy $(x, y, z) = (3; -2008; 2011)$.

⌘ HẾT ⌘