

Bài 1: (2 điểm). Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - \sqrt{48}$.

b) $1 + 2\sqrt{27} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

c) $\sqrt{32} + \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{31}} - 12\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}$.

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Bài 2: (2 điểm). Tìm x biết

a) $3\sqrt{2x-3} - 6 = 9$.

b) $\sqrt{2x^2} - \sqrt{98} = 0$.

c) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x-3} = 0$.

d)

$\frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$.

Bài 3: (2,0 điểm). Cho hai biểu thức

$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0; x \neq 1)$

a) Tính giá trị của Q tại $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

b) Rút gọn $M = P.Q$.

c) Tính các giá trị của x để $M < \frac{-1}{3}$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Bài 4: (3,5 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Vẽ AH vuông góc BC tại H .

a) Tính AH , HB , HC .

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC . Gọi O là giao điểm của AH và EF . Chứng minh 4 điểm A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn và $HB.HC = 4.OE.OF$.

c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $S_{AEMF} = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

2) Một tòa nhà có chiều cao $h(\text{m})$. Khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 55° thì bóng của tòa nhà trên mặt đất dài 15m . Tính chiều cao h của tòa nhà. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 5: (0,5 điểm) Với các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. a) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - \sqrt{48}$
 $= \sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3^2 \cdot 3} + 3\sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{4^2 \cdot 3}$
 $= 2\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
 $= 7\sqrt{3}$

b) $1 + 2\sqrt{27} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
 $= 1 + 2\sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2}$
 $= 1 + 2 \cdot 3\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}$
 $= 1 + 6\sqrt{3} - |\sqrt{3} + 1|$
 $= 1 + 6\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)$
 $= 1 + 6\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1$
 $= 5\sqrt{3}$

c) $\sqrt{32} + \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{31}} - 12\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}$
 $= \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{\frac{62}{31}} - 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2}$
 $= 4\sqrt{2} + \sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{2} - \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Câu 2. a) $3\sqrt{2x-3}-6=9$

Điều kiện: $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

$$3\sqrt{2x-3}-6=9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-3}=15$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=5$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=25$$

$$\Leftrightarrow 2x=28$$

$$\Leftrightarrow x=14(TM)$$

Vậy $x=14$ là nghiệm của phương trình.

b) $\sqrt{2x^2}-\sqrt{98}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2}=\sqrt{98}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\sqrt{\frac{98}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\sqrt{49}$$

$$\Leftrightarrow x^2=7$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}$$

Vậy $x \in \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$ là nghiệm của phương trình.

c) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-3}=0$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

$$\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} + \sqrt{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \cdot (\sqrt{x+3}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=0 \left(do: \sqrt{x+3}+1>1>0; \forall x \geq 3 \right)$$

$$\Leftrightarrow x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=3(TM)$$

Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình.

$$d) \frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$$

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{9(x-1)} - \frac{1}{4}\sqrt{16(x-1)} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} - \frac{1}{4} \cdot 4 \sqrt{x-1} + 27 \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{9} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x-1=1$$

$$\Leftrightarrow x=2(TM)$$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 3. a) Thay $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$ (thỏa mãn) vào Q ta được

$$Q = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} + 2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \frac{9 - \sqrt{3}}{13}.$$

b) Rút gọn $M = P.Q$

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

$$M = \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

$$M = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$M = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}.$$

c) Tính các giá trị của x để $M < \frac{-1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} < \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 2}{3(\sqrt{x} + 2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x} - 1}{3(\sqrt{x} + 2)} < 0 \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

Theo ĐK ta có $3(\sqrt{x} + 2) > 0$

$$\frac{4\sqrt{x} - 1}{3(\sqrt{x} + 2)} < 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{16}.$$

Vậy với $0 \leq x < \frac{1}{16}$ thì $M < \frac{-1}{3}$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của M

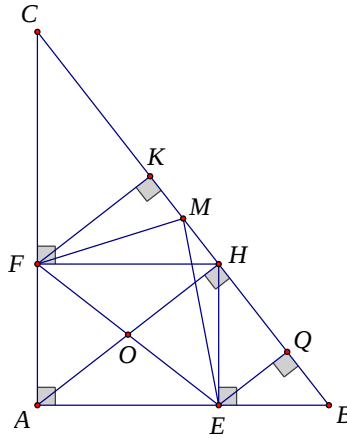
$$\text{Ta có: } M = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 2 - 3}{\sqrt{x} + 2} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Vì: } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M = 1 - \frac{3}{(\sqrt{x} + 2)} \geq 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\min M = -\frac{1}{2}$ khi $x = 0$.

Câu 4.



1)

a) Tính AH , HB , HC .

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm.}$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông ABC ta có:

$$+ AB.AC = AH.BC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{6.8}{10} = 4,8 \text{ cm.}$$

$$+ AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } HC = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ cm.}$$

b) Chứng minh A, E, F, H cùng thuộc đường tròn:

Xét tứ giác $AEFH$ có $\widehat{FAE} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (giả thiết)

Suy ra tứ giác $AEFH$ là hình chữ nhật nên $OA = OF = OE = OH$ suy ra 4 điểm A, E, F, H cùng nằm trên đường tròn tâm O đường kính AH .

+ Chứng minh $HB.HC = 4.OE.OF$

$$\text{Vì } OE = OF \Rightarrow 4OE.OF = 4 \cdot \frac{EF}{2} \cdot \frac{EF}{2} = EF^2.$$

Mà $EF = AH$ (vì $AEFH$ là hình chữ nhật) và $AH^2 = HB.HC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) nên $HB.HC = 4.OE.OF$.

c) Kẻ $FK \perp BC$ tại K , $EQ \perp BC$ tại Q .

Suy ra $FKQE$ là hình thang vuông. Vì O là trung điểm EF mà $OH \parallel EQ$ (cùng $\perp BC$)

Suy ra OH là đường trung bình của hình thang $FKQE \Rightarrow EQ + FK = 2OH = AH$.

$$S_{\triangle FMC} = \frac{1}{2} FK.MC = \frac{1}{2} FK \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{4} FK.BC$$

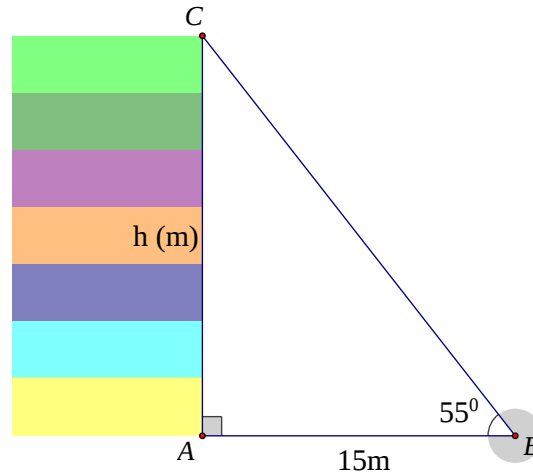
$$S_{\triangle EMB} = \frac{1}{2} EQ.MB = \frac{1}{2} EQ \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{4} EQ.BC$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle FMC} + S_{\triangle EMB} = \frac{1}{4} BC (FK + EQ) = \frac{1}{4} BC.AH = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

$$\text{Mà: } S_{\triangle AEMF} + S_{\triangle EMB} + S_{\triangle FMC} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle AEMF} + \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle AEMF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

$$\text{Vậy: } S_{\triangle AEMF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

2) Gọi chiều cao của tòa nhà là $h = AC$, bóng của tòa nhà lên mặt đất là $AB = 15 \text{ m}$, góc tạo bởi tia nắng với mặt đất là $\widehat{CBA} = 55^\circ$ (như hình vẽ)



Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn cho tam giác vuông ABC ta có:

$$\tan \widehat{CBA} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \tan \widehat{CBA} = 15 \cdot \tan 55^\circ \approx 21,42 \text{ m}$$

Vậy tòa nhà cao $21,42 \text{ m}$.

Câu 5. Với các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{1 + x^2 y^2}.$$

$$\text{Với } x, y \text{ là hai số thực không âm nên ta có: } x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$\text{Thật vậy } (1) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow P \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \sqrt{1 + x^2 y^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy} + xy}.$$

$$\text{Ta có: } 1 \geq x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + xy = \frac{1}{16xy} + xy + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16xy} \cdot xy} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \sqrt{17}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x + y = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases}$.

♣ HẾT ♣