

Bài 1: (2 điểm) Tính giá trị biểu thức

$$A = (2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{6} \quad B = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

$$C = \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} + 2 + \sqrt{3}$$

Bài 2: (1,5 điểm) Giải các phương trình sau

a) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$

c) $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1) \cdot (x + 3)}$

Bài 3: (2,5 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+8}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Tính giá trị của A biết $x = 9 + 4\sqrt{2}$

b) Rút gọn B

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên

Bài 4: (3,5 điểm)

1. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 8,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 38° . Tính chiều cao của cột đèn? (Kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

2. Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, đường cao AH . Đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt đường thẳng AH tại D . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AC và CD .

a) Nếu $AH = 3\text{ cm}$, $AC = 5\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HC , HD , CD ?

b) Chứng minh rằng $CF.CD = CE.CA$.

c) Biết $AB + BC = 8\text{ cm}$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC .

Bài 5: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức: $P = \frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)}$.

☞ HẾT ☞

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1:

$$A = (2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{6}$$

$$A = 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}$$

$$A = 36 - 12\sqrt{18} + 15\sqrt{12}$$

$$A = 36 - 12\sqrt{3^2 \cdot 2} + 15\sqrt{2^2 \cdot 3}$$

$$A = 36 - 12 \cdot 3\sqrt{2} + 15 \cdot 2\sqrt{3} = 36 - 36\sqrt{2} + 30\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

$$B = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})}} + \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})}}$$

$$B = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$B = |2-\sqrt{3}| + |2+\sqrt{3}|$$

$$B = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$C = \sqrt{48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{48 - 10\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{48 - 10 \cdot |2+\sqrt{3}|} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{48 - 20 - 10\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} + 2 + \sqrt{3}$$

$$C = |5-\sqrt{3}| + 2 + \sqrt{3} = 5 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 7$$

Bài 2:

a) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ (điều kiện: $x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x}) - (4\sqrt{x} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1) - 4(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 4) \cdot (\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 4 = 0 \text{ (do } \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 16$

$$\text{b) } \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5 \quad (\text{điều kiện: } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \right)^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+x-1+2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 25$$

$$\Leftrightarrow 3x-2+2\sqrt{2x^2-3x+1} = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-3x+1} = 27-3x \quad (\text{điều kiện: } x \leq 9)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-12x+4 = 9x^2-162x+729$$

$$\Leftrightarrow x^2-150x+725 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-145x+725 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-145) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-5 = 0 \quad (\text{do đk } x \leq 9 \text{ nên } x-145 < 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện } 1 \leq x \leq 9)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$

$$\text{c) } x^2+2x+7 = 3\sqrt{(x^2+1)(x+3)} \quad (\text{điều kiện: } x \geq -3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1) + 2(x+3) - 3\sqrt{(x^2+1)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1) - \sqrt{(x^2+1)(x+3)} + 2(x+3) - \sqrt{(x^2+1)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+3})(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}) = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+1 = 4x+12 \Leftrightarrow x^2-4x-11 = 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow x^2-4x-11 = 0 \Leftrightarrow x^2-4x = 11 \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 15 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{15} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+1 = x+3 \Leftrightarrow$$

$$x^2-x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Kết hợp với điều kiện ta được phương trình có tập nghiệm $S = \{2 - \sqrt{15}; -1; 2; 2 + \sqrt{15}\}$.

Bài 3:

a) Ta có: $x = 9 + 4\sqrt{2} = 8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1 = (2\sqrt{2} + 1)^2$ (thỏa mãn điều kiện)

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} + 1$, thay vào biểu thức A , ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{2} + 1 + 7}{2\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 8}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 1$$

Vậy $x = 9 + 4\sqrt{2}$, thì $A = 2\sqrt{2} + 1$

b) Với $x \geq 0$, $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{3}{1 - \sqrt{x}} + \frac{x + 8}{x + \sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{3}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{x + 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1 - 3(\sqrt{x} + 2) + x + 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1 - 3\sqrt{x} - 6 + x + 8}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có: } P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} + 2}$$

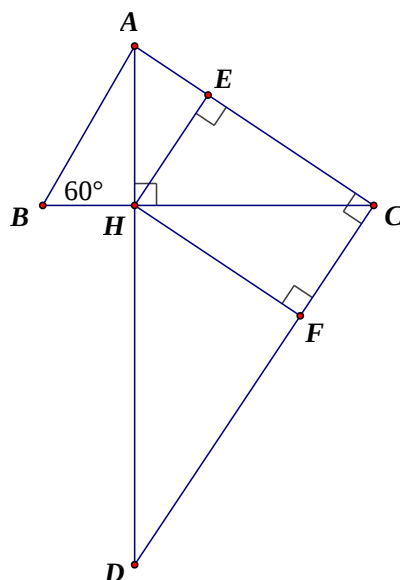
Ta có: $x \in \mathbb{Z}$, để $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 : \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \in U(5) \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Mà $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$

Do đó: $\sqrt{x} + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 9$ thì $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 4:



a) Nếu $AH = 3\text{ cm}$, $AC = 5\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HC , HD , CD ?

+) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , đường cao HE ta có:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \text{ (định lý Py-ta-go)}$$

$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow HC = 4 \text{ (cm)}$$

$$HC^2 = CE.AC \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow CE = \frac{HC^2}{AC} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ (cm)}$$

+) Xét tứ giác $HECF$ có: $\widehat{HEC} = \widehat{ECF} = \widehat{HFC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $HECF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$$\Rightarrow HF = CE = 3,2 \text{ (cm)}$$

+) Xét $\triangle CHD$ vuông tại H , đường cao HF ta có:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HD^2} \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{HF^2} - \frac{1}{HC^2}$$

$$\Rightarrow HD^2 = \frac{HC^2.HF^2}{HC^2 - HF^2} = \frac{4^2.(3,2)^2}{4^2 - (3,2)^2} = \frac{256}{9}$$

$$\Rightarrow HD = \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{16}{3} \approx 5,3 \text{ (cm)}$$

Có: $HF.CD = HC.HD$ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông)

$$\Rightarrow CD = \frac{HC.HD}{HF} = \frac{4.\frac{16}{3}}{\frac{16}{5}} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ (cm)}$$

b) Chứng minh rằng $CF.CD = CE.CA$.

+) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , đường cao HE ta có:

$$HC^2 = CE.AC \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông) (1)}$$

+) Xét $\triangle CHD$ vuông tại H , đường cao HF ta có:

$$HC^2 = CF.CD \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông) (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CF.CD = CE.CA$ (điều phải chứng minh)

c) Biết $AB + BC = 8\text{ cm}$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC$$

Vì $\triangle ABH$ vuông tại H nên ta có $AH = AB.\sin B$

$$\text{Do đó: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC.\sin B = \frac{1}{2} AB.BC.\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} .AB.BC = \frac{\sqrt{3}}{4} AB.BC$$

$$\text{Mặt khác } AB.BC \leq \left(\frac{AB+BC}{2} \right)^2 = \left(\frac{8}{2} \right)^2 = 16$$

Dấu “=” xảy ra khi $AB = BC = 4\text{ cm}$

$$\text{Do đó: } S_{\triangle ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} .16 = 4\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

Vậy $\max S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ khi $\triangle ABC$ cân tại B .

Bài 5:

Ta có:

$$\frac{a}{bc(a+1)} = \frac{a}{abc+bc} = \frac{a}{ab+bc+ca+bc} = \frac{a}{b(a+c)+c(a+b)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b(a+c)} + \frac{a}{c(a+b)} \right)$$

Tương tự ta chứng minh được:

$$\frac{b}{ac(b+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a(b+c)} + \frac{b}{c(a+b)} \right)$$

$$\frac{c}{ab(c+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{b(a+c)} + \frac{c}{a(b+c)} \right)$$

$$\text{Do đó } P = \frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a+c}{b(a+c)} + \frac{b+c}{a(b+c)} + \frac{a+b}{c(a+b)} \right)$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{1}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $b(a+c) = c(a+b) = a(b+c) \Leftrightarrow ab+bc = ac+bc = ab+ac$

$$\Leftrightarrow abc - ac = abc - ab = abc - bc.$$

$$\Leftrightarrow ab = bc = ca \text{ mà } ab+bc+ca = abc \Leftrightarrow a = b = c = 3$$

♣ HẾT ♣