

Bài 1: (2,5 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-14}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}}$ (với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$)

a) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

b) Tính A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $A > 1$.

Bài 2: (1,5 điểm) a) Tính: $B = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} \right) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})$

b) Giải phương trình sau: $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1$.

Bài 3: (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m+1)x + m + 2$ (với tham số $m \neq -1$) có đồ thị là đường thẳng (d)

a) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-2; -1)$

b) Vẽ đồ thị hàm số ứng với giá trị m tìm được ở câu a trên hệ trục tọa độ Oxy và gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số này với các trục Ox, Oy . Tính độ dài đoạn AB và diện tích $\triangle AOB$.

Bài 4: (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn OB lấy điểm H sao cho $HB \geq HO$. Qua H kẻ dây CD vuông góc với AB .

a) Nếu cho biết thêm $\widehat{CAB} = 30^\circ$ và $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài bán kính đường tròn (O) và độ dài dây CD (giả thiết thêm này chỉ dùng riêng cho câu a không dùng để làm những câu còn lại).

b) Lấy điểm I nằm trong tam giác ACH sao cho $BI = BC$. Chứng minh $BI^2 = BH \cdot BA$ và $\widehat{BIH} = \widehat{BAI}$.

c) Gọi giao điểm của AI và CH là K . Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AK , đường thẳng này cắt đường thẳng CD tại P . Giả sử BK song song với IH . Khi đó:

1) Chứng minh: $KB^2 = KI \cdot KA = KH \cdot KP$ và $\widehat{KBP} = 90^\circ$

2) Chứng minh: $OI = OH$

Bài 5: (0,5 điểm) Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 5a + 4b + c$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: a) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\sqrt{x}-14}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-14}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-14 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-14 - (x-9) + (2x-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-14-x+9+2x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

b) Với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Ta có $x = (2 - \sqrt{3})^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$$

Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} - 2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $A = 1 - \sqrt{3}$

c) Ta có $A > 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} > 0$$

$$\text{Vì } 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 > 0$$

$$\Rightarrow x > 4$$

Kết hợp với điều kiện xác định $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

$$\Rightarrow x > 4, x \neq 9 \text{ thì } A > 1$$

Bài 2:

$$\text{a) } B = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} \right) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} \right) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$= (-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$$

$$= 5-3=2$$

$$\text{b) } \sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = 1 \text{ (Điều kiện } x \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)-4\sqrt{x-4}+4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-4}-2| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}-2=1 & (1) \\ \sqrt{x-4}-2=-1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1)} \Rightarrow \sqrt{x-4}=3$$

$$\Leftrightarrow x=13 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Giải (2)} \Rightarrow \sqrt{x-4}=1$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{13; 5\}$.

Bài 3:

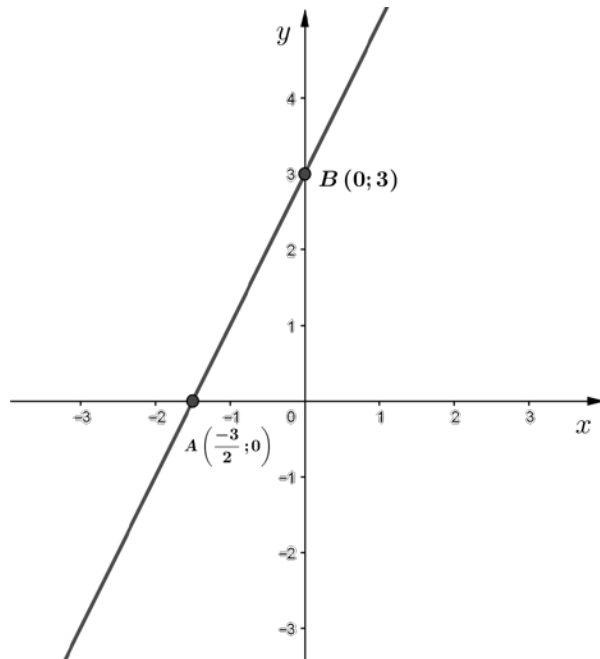
$$\text{a) } \text{Đồ thị hàm số đi qua điểm } M(-2; -1) \Leftrightarrow M(-2; -1) \in (d) \text{ nên}$$

$$-1 = (m+1) \cdot (-2) + m + 2 \Leftrightarrow -m = -1 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-2; -1)$ khi và chỉ khi $m = 1$

$$\text{b) } \text{Với } m = 1 \text{ ta được hàm số } y = 2x + 3.$$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 3$, cắt trục tung Oy tại $B(0;3)$ và cắt trục hoành Ox tại $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$. Do đó, hàm số có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm A và B .



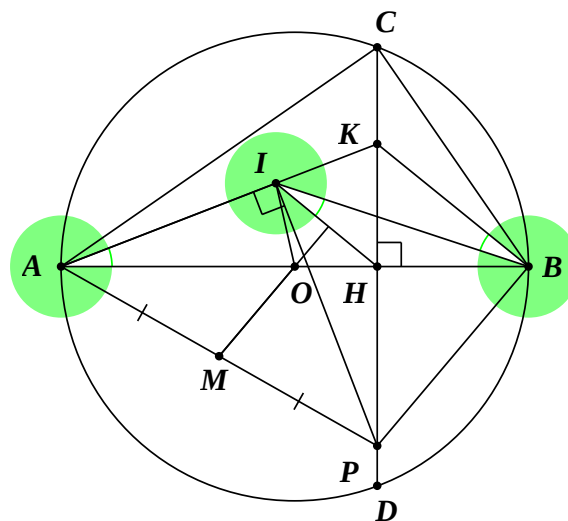
Ta có $OA = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$; $OB = |3| = 3$. Xét $\triangle ABO$ vuông tại O nên áp dụng định lý Pytago

$$\text{ta có } AB^2 = OA^2 + OB^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ (đơn vị độ dài).}$$

$$\text{Và } S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 2,25 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Bài 4:



a) Nếu cho biết thêm $\widehat{CAB} = 30^\circ$ và $AC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài bán kính đường tròn (O) và độ dài dây CD (giả thiết thêm này chỉ dùng riêng cho câu a không dùng để làm những câu còn lại).

Vì C thuộc đường tròn tâm O đường kính $AB \Rightarrow OA = OB = OC = \frac{AB}{2} = R$

Xét $\triangle ACB$ ta có: $OA = OB = OC = \frac{AB}{2} = R$

$\Rightarrow \triangle ACB$ vuông tại C

Xét $\triangle ACB$ vuông tại C , ta có:

$$AC = AB \cdot \cos \widehat{CAB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos \widehat{CAB}} = \frac{8}{\cos 30^\circ} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow \text{Độ dài bán kính đường tròn } (O) \text{ là: } \frac{AB}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle ACH$ vuông tại H , ta có:

$$CH = AC \cdot \sin \widehat{CAH} = AC \cdot \sin \widehat{CAB} = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (cm)}$$

Xét (O) có: AB là đường kính, CD là dây cung, $AB \perp CD$ tại H (giả thiết) $\Rightarrow H$ là trung điểm của CD (quan hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow CD = 2CH = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (cm)}$

b) Lấy điểm I nằm trong tam giác ACH sao cho $BI = BC$. Chứng minh $BI^2 = BH \cdot BA$ và $\widehat{BIH} = \widehat{BAI}$.

+) Xét $\triangle ACB$ vuông tại C , đường cao CH ta có:

$$BC^2 = BH \cdot BA \text{ (quan hệ giữa cạnh và đường cao tam giác vuông)}$$

Mà $BI = BC$ (giả thiết)

Do đó, suy ra $BI^2 = BH \cdot BA$ (điều phải chứng minh).

$$\Rightarrow \frac{BI}{BA} = \frac{BH}{BI}$$

Xét $\triangle BIH$ và $\triangle BAI$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{BI}{BA} = \frac{BH}{BI} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{ABI} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BIH \sim \triangle BAI \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{BAI} \text{ (điều phải chứng minh)} \quad (1)$$

c) Gọi giao điểm của AI và CH là K . Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AK , đường thẳng này cắt đường thẳng CD tại P . Giả sử BK song song với IH . Khi đó:

1) Chứng minh: $KB^2 = KI \cdot KA = KH \cdot KP$ và $\widehat{KBP} = 90^\circ$

Vì $BK \parallel IH$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{IBK}$ (hai góc so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{IBK}$ hay $\widehat{BAK} = \widehat{IBK}$

Xét ΔKBI và ΔKAB , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAK} = \widehat{IBK} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{AKB} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KBI \sim \Delta KAB \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{KI}{KB} \Rightarrow KB^2 = KI.KA \quad (3)$$

Xét ΔKIP và ΔKHA , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KIP} = \widehat{KHA} (= 90^\circ) \\ \widehat{K} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KIP \sim \Delta KHA \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{KI}{KH} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow KI.KA = KH.KP \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow KB^2 = KI.KA = KH.KP$ (điều phải chứng minh).

$$\Rightarrow \frac{KB}{KH} = \frac{KP}{KB}$$

Xét ΔKBH và ΔKPB , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{KB}{KH} = \frac{KP}{KB} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{PKB} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KBH \sim \Delta KPB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{KBP}; \text{ mà } \widehat{KHB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KBP} = 90^\circ \text{ (điều phải chứng minh).}$$

2) Chứng minh: $OI = OH$

Gọi M là trung điểm của AP

Xét ΔAPB , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AM = MP \\ OA = OB = R \end{array} \right\} \Rightarrow OM \text{ là đường trung bình của } \Delta APB.$$

$$\Rightarrow OM \parallel BP$$

Mà $BP \perp BK$ (vì $\widehat{KBP} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow OM \perp BK \text{ (từ vuông góc đến song song)}$$

$$\text{Hay } OM \perp IH \text{ (vì } IH \parallel BK \text{)} \quad (*)$$

Xét ΔAHP vuông tại H , ta có:

$$MH = AM = MP = \frac{AP}{2} \text{ (tính chất trung tuyến và cạnh huyền tam giác vuông)} \quad (5)$$

Xét ΔAIP vuông tại I , ta có:

$$MI = AM = MP = \frac{AP}{2} \text{ (tính chất trung tuyến và cạnh huyền tam giác vuông)} \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow MH = MI$$

$\Rightarrow M$ thuộc trung trực của IH (tính chất đường trung trực của đoạn thẳng) (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow MO$ là đường trung trực của IH .

$\Rightarrow OI = OH$ (điều phải chứng minh).

Bài 5: Do $a, b, c \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-a \leq 0 \\ 1-b \leq 0 \\ 1-c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)(1-b) \geq 0 \\ (1-b)(1-c) \geq 0 \\ (1-a)(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+ab \geq a+b \\ 1+bc \geq b+c \\ 1+ca \geq c+a \end{cases}$

$$\Rightarrow 3+ab+bc+ca \geq 2(a+b+c) \Rightarrow a+b+c \leq \frac{7}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi 2 số bằng 1.

$$\text{Do } b, c \geq 1 \Rightarrow b+4c \geq 5 \Rightarrow -(b+4c) \leq -5$$

$$\text{Ta có: } P = 5a + 4b + c = 5.(a+b+c) - (b+4c)$$

$$\text{Suy ra } P \leq 5(a+b+c) - 5 = 5 \cdot \frac{7}{2} - 5 = \frac{25}{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{25}{2} \text{ khi } \begin{cases} b=c=1 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

♣ HẾT ♣