SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO BẮC GIANG
CỤM THPT LẠNG GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP CỤM
NĂM HỌC 2016 - 2017
MÔN THI: TOÁN LỚP 12 PHỔ THÔNG
Ngày thi: 19/02/2017
(Thời gian làm bài 180 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2 điểm) Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{mx-2}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 2 (2 điểm) Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong $\left(C\right)$ và đường thẳng $\left(d\right): y=-2x+m$.
Tìm m để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt đường cong $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho biểu thức $P=k_1^{2017}+k_2^{2017}$ đạt giá trị nhỏ nhất với $k_1=y'\left(x_A\right), k_2=y'\left(x_B\right)$.

Câu 3 (2 điểm) Giải phương trình $2\sqrt{3}.\sin^3 x+(\cos x+1)(6\cos x-9)+3\sin 2x.\sin x+6=0$.

Câu 4 (2 điểm) Cho $a=\log 196$, $b=\log 56$. Tính $\log 0.175$ theo a, b.

Câu 5 (2 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25}\\ 7^{2x+5y-1}=6\log_7(5x-5y-5)+1\end{cases}$$

Câu 6 (2 điểm)

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}dx$

Câu 7 (1 điểm) Một hộp đựng 50 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

Câu 8 (4 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc hạ từ A' xuống $\left(ABC\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ hợp với mặt phẳng đáy góc 45^o.

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CC'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và IJ.

Câu 9 (2 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Điểm H nằm trên cạnh AB thỏa mãn $HB=2HA$, SH vuông góc với AB. Mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với mặt phẳng chứa đáy, SA hợp với đáy góc 60^o.

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

b) Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua trung điểm của SA và song song với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo giao tuyến là đường tròn $\left(C\right)$. Tính bán kính đường tròn $\left(C\right)$.

Câu 10 (1 điểm)

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}+\frac{1}{\left(y+1\right)^2}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}+\frac{4}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)}.$$

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh……………………………………………..….Số báo danh…………………….…..

Giám thị 1 *(Họ tên và chữ kí)*……………..……………………..…………………….………………

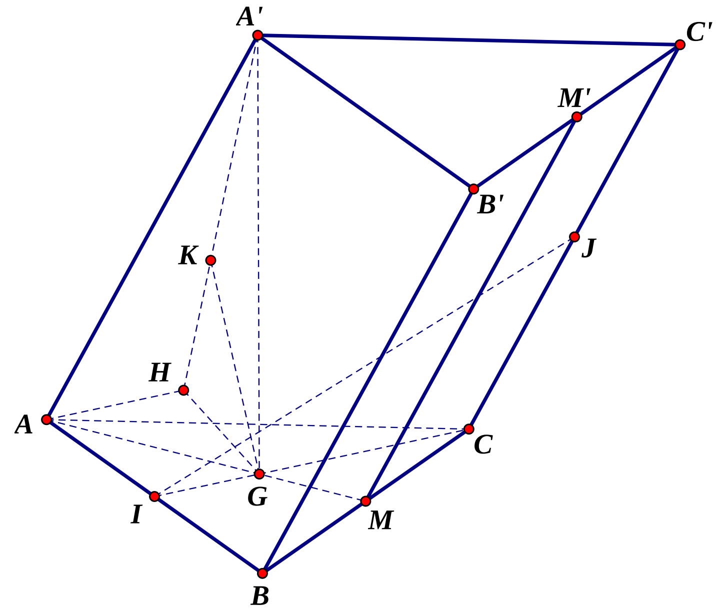
Giám thị 2 *(Họ tên và chữ kí)*……………..……………………..…………………….………………

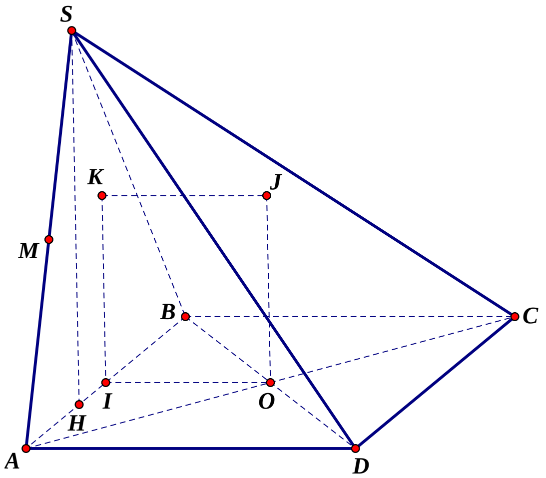
HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
1	Tìm m để hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{mx-2}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.	**2** điểm
	+ Điều kiện xác định của hàm số $f(x)$ là $mx\neq 2$. + Xét $m=0$ không thỏa mãn bài toán.	**0.5**
	+Xét $m\neq 0$ hàm số trở thành $f(x)=\dfrac{1}{m}.\dfrac{x-2}{x-\frac{2}{m}}$ và $f'(x)=\dfrac{1}{m}.\dfrac{-\frac{2}{m}+2}{\left(x-\frac{2}{m}\right)^2}=\dfrac{-2+2m}{m^2\left(x-\frac{2}{m}\right)^2}$.	**0.5**
	+ Để thỏa mãn bài toán ta có điều kiện $\begin{cases}\dfrac{2}{m}\notin(0;1)\\ -2+2m>0.\end{cases}$	**0.5**
	+Rút ra được điều kiện là $1<m\leq 2$.	**0.5**
2	Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d): y=-2x+m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho biểu thức $P=k_1^{2017}+k_2^{2017}$ đạt giá trị nhỏ nhất với $k_1=y'(x_A),k_2=y'(x_B)$.	**2** điểm
	+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d: $\dfrac{2x+3}{x+2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -2\\ 2x^2+(6-m)x+3-2m=0\ (1)\end{cases}$	**0.25**
	+Điều kiện để có hai giao điểm là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2 hay $\begin{cases}\Delta_{(1)}>0\\ 2.(-2)^2+(6-m).(-2)+3-2m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m+12>0\\ -1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$	**0.25**
	+ Giả sử các hoành độ giao điểm là x_1,x_2. Ta có $k_1=\dfrac{1}{(x_1+1)^2},k_2=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$. Ta có $k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{(x_1x_2+2x_1+2x_2+4)^2}=4$.	**0.5**
	+ $P=(k_1)^{2017}+(k_2)^{2017}\geq 2.\sqrt{(k_1k_2)^{2017}}=2^{2018}$.	**0.5**
	+ Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_1+2)^2}=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}\Leftrightarrow (x_1+2)^2=(x_2+2)^2\Rightarrow m=-2.$	**0.5**
3	Giải phương trình $2\sqrt{3}.\sin^3 x+(\cos x+1)(6\cos x-9)+3\sin 2x.\sin x+6=0$.	**2** điểm
	Phương trình tương đương $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.\sin^3 x-3(2\cos^3 x-2\cos^2 x-\cos x+1)=0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.\sin x.(1-\cos x)(1+\cos x)-3(\cos x-1)(2\cos^2 x-1)=0$	**0.5**
	$\Leftrightarrow \sqrt{3}(1-\cos x)\left[2\sin x(1+\cos x)+\sqrt{3}.\cos 2x\right]=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ 2\sin x+\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 2x=0\end{array}\right.$	**0.5**
	Với $\cos x=1\Leftrightarrow x=k.2\pi$	**0.5**

	Với $2\sin x+\sin 2x+\sqrt{3}.\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3}=-x+k.2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi+x+k.2\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ **Kết luận:** phương trình có nghiệm $x=k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}; x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$	**0.5**
4	Cho $a=\log 196$, $b=\log 56$. Tính $\log 0.175$ theo *a*, *b*.	**2** điểm
	+ Ta có $\log 0.175=\log(175.10^{-3})=\log 175-3$. + Giả sử tồn tại ba số m,n,p sao cho $175=10^m.196^n.56^p$ $\Leftrightarrow 5^2.7^1=(2.5)^m.(2^2.7^2)^n.(2^3.7)^p$ $\Leftrightarrow 2^0.5^2.7^1=2^{m+2n+3p}.5^m.7^{2n+p}$ (*)	**0.5**
	+ Vì 2, 5 và 7 là các số nguyên tố cùng nhau nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2n+3p=0 \\ m=2 \\ 2n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=2, n=\frac{5}{4}, p=-\frac{3}{2}$	**0.5**
	+ Do đó $\log 175=\log(10^2.196^{\frac{5}{4}}.56^{-\frac{3}{2}})=2+\frac{5}{4}\log 196-\frac{3}{2}\log 56=2+\frac{5}{4}a-\frac{3}{2}b$	**0.5**
	+ Vậy $\log 0.175=\frac{5}{4}a-\frac{3}{2}b-1$	**0.5**
5	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25} & (1) \\ 7^{2x+5y-1}=6\log_7(5x-5y-5)+1 & (2) \end{cases}$	**2** điểm
	Phương trình (1) tương đương $\sqrt{(x+y)^2+(x+2y)^2}+\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{(x+y+4)^2+(x+2y+3)^2}$ (*) Giả sử $\vec{a}=(x+y;\ x+2y)$, $\vec{b}=(4;3)$ $\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(x+y+4;\ x+2y+3)$. Phương trình (*) có dạng $\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|=\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$ Ta luôn có $\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|\ge\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$. Do đó (*) xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}=(x+y;\ x+2y)$, $\vec{b}=(4;3)$ cùng hướng. Khi đó $\frac{x+y}{4}=\frac{x+2y}{3} \Leftrightarrow x=-5y$	**0.5**
	Thay vào phương trình (2) ta được $7^{x-1}=6\log_7(6x-5)+1$ Điều kiện: $x>\frac{5}{6}$ Đặt $t-1=\log_7(6x-5)$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 7^{x-1}=6(t-1)+1 \\ 7^{t-1}=6x-5 \end{cases}$ Trừ theo vế hai phương trình ta được $7^{x-1}+6x=7^{t-1}+6t$ (*)	**0.5**
	Xét hàm số $f(u)=7^{u-1}+6u$ trên $\mathbb{R}$. Ta dễ dàng thấy $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó	**0.5**

	$(*) \Leftrightarrow f(x)=f(t) \Leftrightarrow x=t \Leftrightarrow \log_7(6x-5)=x-1 \Leftrightarrow 6x-5=7^{x-1} \Leftrightarrow 7^{x-1}-6x+5=0\ (3)$	
	Xét hàm số $g(x)=7^{x-1}-6x+5$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=7^{x-1}.\ln 7-6$ $g''(x)=7^{x-1}.\ln^2 7>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ Do $g''(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Như thế phương trình $g(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Mặt khác $g(1)=g(2)=0$, vì vậy phương trình (3) có đúng hai nghiệm $x=1;\ x=2$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(1;-\frac{1}{5}\right)$ và $\left(2;-\frac{2}{5}\right)$	**0.5**
6	Tính tích phân $I=\int\limits_1^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{14-x^2-\frac{1}{x^2}}dx$	**2 điểm**
	$I=\int\limits_1^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{16-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)$	**0.5**
	Đặt $x+\frac{1}{x}=4\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.	**0.5**
	Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\,d(4\sin t)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}16\cos^2 t\,dt$	**0.5**
	$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(8+8\cos 2t)\,dt=(8t+4\sin 2t)\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3}$.	**0.5**
7	Một hộp đựng 50 quả cầu được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 50. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.	**1 điểm**
	Có C_{50}^3 cách lấy ra 3 quả cầu từ hộp đã cho. Chia 50 quả cầu trong hộp thành 4 nhóm: + Nhóm I: gồm 25 quả cầu mang số lẻ + Nhóm II: gồm 13 quả cầu mang số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4. + Nhóm III: gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 4 mà không chia hết cho 8. + Nhóm IV: gồm 6 quả cầu mang số chia hết cho 8.	**0.5**
	Để tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số **không** chia hết cho 8 thì có 4 trường hợp sau xảy ra: 1) 1 quả thuộc nhóm I, 2 quả thuộc nhóm II: có $C_{25}^1.C_{13}^2$ cách lấy. 2) 2 quả thuộc nhóm I, 1 quả thuộc nhóm II: có $C_{25}^2.C_{13}^1$ cách lấy. 3) 2 quả thuộc nhóm I, 1 quả thuộc nhóm III: có $C_{25}^2.C_6^1$ cách lấy. 4) 3 quả thuộc nhóm I: có C_{25}^3 cách lấy. Vậy xác suất cần tính là $1-\frac{C_{25}^1.C_{13}^2+C_{25}^2.C_{13}^1+C_{25}^2.C_6^1+C_{25}^3}{C_{50}^3}=\frac{193}{392}$.	**0.5**
8	Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc hạ từ A' xuống (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng $(BCC'B')$ hợp với mặt phẳng đáy góc 45^o. a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ b) Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CC'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và IJ.	**4 điểm**

		
	a) Gọi M, M’ lần lượt là trung điểm của BC, B’C’. G là trọng tâm của tam giác ABC Ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ và $\left(ABC\right)$ là góc giữa hai đường thẳng thẳng MM' và AM hay là góc giữa AA' và AM bằng $\widehat{A'AG}=45^o$	0,5
	Tính được $A'G=AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	0.5
	$S_{\vartriangle ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)	0.5
	Thể tích khối lăng trụ ABC.A’B’C’ là $V=S_{\vartriangle ABC}.A'G=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a^3}{4}$ (đvtt)	0,5
	b) Kẻ Ax song song với CI Kẻ GH vuông góc với Ax tại H Kẻ GK vuông góc với A’H tại K Ta chứng minh được $\left(A'AH\right)//\left(C'CI\right)$ mà $AA'\subset\left(A'AH\right);IJ\subset\left(C'CI\right)$ Suy ra $d\left(AA',IJ\right)=d\left(\left(A'AH\right),\left(C'CI\right)\right)=d\left(G,\left(A'AH\right)\right)=GK$	1
	Tính được $GH=\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{1}{GK^2}=\dfrac{1}{A'G^2}+\dfrac{1}{GH^2}\Rightarrow GK=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$ Vậy $d\left(AA',IJ\right)=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.	1
9	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Điểm H nằm trên cạnh AB thỏa mãn $HB=2HA$, SH vuông góc với AB. Mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với mặt phẳng chứa đáy, SA hợp với đáy góc 60^o. a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. b) Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua trung điểm của SA và song song với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$,	2 điểm

	mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính đường tròn (C).	
		
	a) Gọi O là giao điểm của AC và BD Gọi I là trung điểm của AB, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB Dựng (Δ) đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABCD) Dựng (Δ') đi qua K và vuông góc với (SAB) (Δ) cắt (Δ') tại J. Suy ra J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD	**0.5**
	Tính được $SH=a\sqrt{3},\ S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB.SH=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ (đvdt) $SA=2a, SB=a\sqrt{7}$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB $r=\frac{SA.SB.AB}{4S_{\Delta ABC}}=\frac{4a\sqrt{21}}{3}\Rightarrow KA=\frac{4a\sqrt{21}}{3}$ $IK=\sqrt{AK^2-AI^2}=\sqrt{\left(\frac{4a\sqrt{21}}{3}\right)^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=a\sqrt{\frac{421}{12}}$ Bán kinh mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là $R=JA=\sqrt{AO^2+JO^2}=\sqrt{AO^2+IK^2}=\sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{\frac{421}{12}}\right)^2}=a\sqrt{\frac{475}{12}}$	**0.5**
	b) Gọi M là trung điểm của SA Khoảng cách từ M đến (ABCD) bằng $\frac{1}{2}SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ Khoảng cách từ J đến mặt phẳng (P) bằng $d=\left\lvert\frac{a\sqrt{3}}{2}-a\sqrt{\frac{421}{12}}\right\rvert=a\left(\sqrt{\frac{421}{12}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**0.5**
	Bán kính đường tròn (C) là $r_1=\sqrt{R^2-d^2}=a\sqrt{\frac{475}{12}-\left(\sqrt{\frac{421}{12}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$	**0.5**
10	Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}$.	1 điểm
	Theo giả thiết $y+z=x\left(y^2+z^2\right)\ge\frac{1}{2}x(y+z)^2\Rightarrow y+z\le\frac{2}{x}$.	0.25

	Ta có: $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\ge\frac{2}{(y+1)(z+1)}\ge\frac{8}{(y+z+2)^2}\ge\frac{8}{\left(\frac{2}{x}+2\right)^2}=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$. $\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge\frac{4}{(x+1)(y+z+2)^2}\ge\frac{4}{(1+x)\left(\frac{2}{x}+2\right)^2}=\frac{x^2}{(x+1)^3}$. Suy ra $P\ge\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2x^2}{(1+x)^2}+\frac{4x^2}{(1+x)^3}=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$	0.5
	Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$ với $x>0$ tìm được giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{91}{108}$ khi $x=\frac{1}{5}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{91}{108}$ đạt được khi $x=\frac{1}{5}, y=z=5$.	0.25