SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LONG AN

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, gồm 04 câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÒNG 2
NĂM HỌC: 2018-2019
Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: **20/9/2018 (Buổi thi thứ nhất)**
Thời gian: **180 phút (không kể thời gian phát đề)**

Câu 1 (5,0 điểm):

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}-x+y=1\\ \sqrt{2x+y}+\sqrt{4x+y}=2\end{cases}$.

Câu 2 (5,0 điểm):

Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+3$ (m là tham số thực) có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho trên đồ thị $\left(C_m\right)$ tồn tại duy nhất một điểm mà tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $x-8y+2018=0$.

Câu 3 (5,0 điểm):

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi AA' là đường kính của $\left(O\right)$. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Chứng minh $\widehat{NIK}=90^0$.

Câu 4 (5,0 điểm):

Cho K là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ K. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là bội của 4.

---------- HẾT ----------
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu – Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………… ***Số báo danh:*** ………………………………
Cán bộ coi thi 1 *(ký, ghi rõ họ và tên)* ***Cán bộ coi thi 2*** *(ký, ghi rõ họ và tên)*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **LONG AN**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÒNG 2** **NĂM HỌC: 2018-2019**
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang, gồm 03 câu)*	Môn thi: **TOÁN** Ngày thi: **21/9/2018 (Buổi thi thứ hai)** Thời gian: **180 phút (không kể thời gian phát đề)**

Câu 5 (6,0 điểm):

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa $f\left(xf\left(y\right)\right)+f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)+f\left(x+f\left(y\right)\right)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng: "Nếu tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(a\right)\neq 0$ thì f là đơn ánh".

b) Tìm tất cả các hàm số f.

Câu 6 (7,0 điểm):

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1=2020 \\ u_{n+1}=\dfrac{2018n+2}{2019n+2}(u_n+1),\ \forall n=1,2,3,... \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 7 (7,0 điểm):

Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số, trong mỗi số đó các chữ số đều lớn hơn 1 và không có hai chữ số khác nhau cùng nhỏ hơn 7 đứng liền nhau?

---------- HẾT ----------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu – Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: *…………………………………………* ***Số báo danh:*** *……………………………*

Cán bộ coi thi 1 *(ký, ghi rõ họ và tên)* ***Cán bộ coi thi 2*** *(ký, ghi rõ họ và tên)*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÒNG 2
NĂM HỌC: 2018-2019

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: **20/9/2018 (Buổi thi thứ nhất)**
Thời gian: **180 phút (không kể thời gian phát đề)**

HƯỚNG DẪN CHẤM

Cách giải khác nếu đúng thì giám khảo vẫn cho đủ số điểm.

NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1 (5,0 điểm): Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}-x+y=1 & (1)\\ \sqrt{2x+y}+\sqrt{4x+y}=2 & (2)\end{cases}$.	
Điều kiện $\begin{cases}2x+y\ge 0\\ 4x+y\ge 0\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2x+y}\\ v=\sqrt{4x+y}\end{cases}$ $(u,v\ge 0)$	0,5
Ta có: $\begin{cases}u^2-v^2=-2x\\ u+v=2\end{cases}\Rightarrow u=\dfrac{2-x}{2}$	1,0
Thay $u=\dfrac{2-x}{2}$ vào (1), ta có: $\dfrac{2-x}{2}-x+y=1\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x$	1,0
Thay $y=\dfrac{3}{2}x$ vào (1), ta có: $\sqrt{\dfrac{7}{2}x}+\dfrac{1}{2}x=1\Leftrightarrow\sqrt{14x}=2-x$	1,0
$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x=9+\sqrt{77}\\ x=9-\sqrt{77}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=9-\sqrt{77}$	1,0
$\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}\left(9-\sqrt{77}\right)$. So điều kiện, hệ có nghiệm $\left(9-\sqrt{77};\dfrac{27-3\sqrt{77}}{2}\right)$	0,5
Câu 2 (5,0 điểm): Cho hàm số $y=x^4+2mx^2+3$ (m là tham số thực) có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho trên đồ thị $\left(C_m\right)$ tồn tại duy nhất một điểm mà tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $x-8y+2018=0$.	
Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -8	0,5
Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm thì x_0 là nghiệm của phương trình $x^3+mx+2=0$ (1)	1,0
Để thỏa yêu cầu bài toán thì (1) có nghiệm duy nhất.	1,0

Vì $x=0$ không là nghiệm của (1) nên

$(1) \Leftrightarrow m=-x^2-\dfrac{2}{x}$

Xét hàm số: $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x}$; $f'(x)=-2x+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-2x^3+2}{x^2}$

0,5

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -3 \searrow -\infty$	

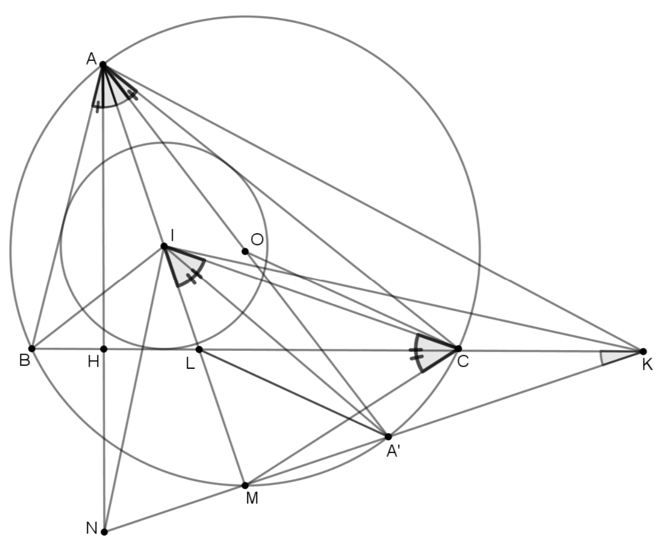
1,0

Từ bảng biến thiên, (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m>-3$.
Vậy $m>-3$ thỏa yêu cầu bài toán.

1,0

Câu 3 (5,0 điểm):

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao kẻ từ A và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi AA' là đường kính của (O). Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Chứng minh $\widehat{NIK}=90^0$.



1,0

Ta có $\widehat{OAC}=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}=90^0-\widehat{ABC}=\widehat{BAH}$ mà *AI* là phân giác góc *A* nên $\widehat{HAI}=\widehat{OAI}$. Suy ra tam giác *ANA'* cân tại *A*.

1,0

Gọi *L* là giao điểm của *MA* và *BC*.
Ta có $\widehat{HKN}=90^0-\widehat{HNK}=\widehat{HAM}=\widehat{LAA'}$. Suy ra, tứ giác *ALA'K* nội tiếp.
Do đó $MA'.MK=ML.MA \Rightarrow MN.MK=ML.MA$. $\quad$ (1)

1,0

Vì $\widehat{MAC} = \widehat{MCB}$ hay $\widehat{MAC} = \widehat{MCL}$ nên hai tam giác MCL và MAC đồng dạng. Suy ra $ML.MA = MC^2$. (2)	1,0
Do IA, IC là các tia phân giác trong của tam giác ABC nên ta có: $\widehat{MIC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{MC}\right)$ và $\widehat{MCI} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{MB}\right)$. Do đó, $\widehat{MIC} = \widehat{MCI}$ nên tam giác MIC cân tại M. Suy ra, $MI = MC$. (3)	1,0
Từ (1), (2), (3) suy ra $MN.MK = MI^2 \Rightarrow \widehat{NIK} = 90^0$.	1,0

Câu 4 (5,0 điểm): Cho K là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ K. Tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là bội của 4.	
Ta có: $\left\|K\right\| = 9.10^3 = 9000$.	0,5
Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 4. $A = \left\{\overline{abcd} \in \mathbb{N} : (a+b+c+d) \vdots 4\right\}$. Xét $b+c+d = 4k+r$ $(0 \le r \le 3)$. Nếu $r \in \{0;1;2\}$ thì mỗi giá trị của r sẽ có hai giá trị của a sao cho $(a+b+c+d) \vdots 4$ (đó là $a = 4-r$, $a = 8-r$). Nếu $r = 3$ thì mỗi giá trị của r sẽ có ba giá trị của a sao cho $(a+b+c+d) \vdots 4$ (đó là $a=1$, $a=5$, $a=9$).	1,0
Gọi $B = \left\{\overline{bcd} \in \mathbb{N} : 0 \le b,c,d \le 9,\ b+c+d = 4k+r,\ 0 \le r \le 2\right\}$, $C = \left\{\overline{bcd} \in \mathbb{N} : 0 \le b,c,d \le 9,\ b+c+d = 4k+3\right\}$. Khi đó, ta có: $\left\|A\right\| = 2\left\|B\right\| + 3\left\|C\right\| = 2\left(\left\|B\right\| + \left\|C\right\|\right) + \left\|C\right\| = 2.10^3 + \left\|C\right\|$.	1,0
Xét tập hợp C với $c+d = 4m+n$. Nếu $n \in \{0;1\}$ thì mỗi giá trị của n sẽ có hai giá trị của b sao cho $b+c+d = 4k+3$. Nếu $n \in \{2;3\}$ thì mỗi giá trị của n sẽ có ba giá trị của b sao cho $b+c+d = 4k+3$.	1,0
Gọi $D = \left\{\overline{cd} \in \mathbb{N} : 0 \le c,d \le 9, c+d = 4m+n,\ 0 \le n \le 1\right\}$, $E = \left\{\overline{cd} \in \mathbb{N} : 0 \le c,d \le 9,\ c+d = 4m+n,\ 2 \le n \le 3\right\}$. Khi đó, ta có: $\left\|C\right\| = 2\left\|D\right\| + 3\left\|E\right\| = 2\left(\left\|D\right\| + \left\|E\right\|\right) + \left\|E\right\| = 2.10^2 + \left\|E\right\|$, với $\left\|E\right\| = 25 + 24 = 49$. Suy ra: $\left\|A\right\| = 2.10^3 + 2.10^2 + 49 = 2249$.	1,0
Gọi biến cố X: "Số được chọn có tổng các chữ số là bội của 4". Khi đó, xác suất của biến cố X là: $P(X) = \frac{2249}{9000}$.	0,5

……….HẾT……….

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH VÒNG 2 NĂM HỌC: 2018-2019

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: **21/9/2018 (Buổi thi thứ hai)**
Thời gian: **180 phút (không kể thời gian phát đề)**

HƯỚNG DẪN CHẤM

Cách giải khác nếu đúng thì giám khảo vẫn cho đủ số điểm.

NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 5 (6,*0 điểm*): Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa $f\left(xf\left(y\right)\right)+f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)+f\left(x+f\left(y\right)\right)$, với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. a) Chứng minh rằng: "Nếu tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(a\right)\neq 0$ thì f là đơn ánh". b) Tìm tất cả các hàm số f.	
Lấy $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(y_1\right)=f\left(y_2\right)$ (1). Thế x bởi a và thế y lần lượt bởi y_1,y_2 ta được: $f\left(af\left(y_1\right)\right)+f\left(f\left(a\right)+f\left(y_1\right)\right)=y_1f\left(a\right)+f\left(a+f\left(y_1\right)\right)$ (2) $f\left(af\left(y_2\right)\right)+f\left(f\left(a\right)+f\left(y_2\right)\right)=y_2f\left(a\right)+f\left(a+f\left(y_2\right)\right)$ (3)	1,0
Từ (1), (2), (3) ta được: $y_1f\left(a\right)=y_2f\left(a\right)\Rightarrow y_1=y_2$ (vì $f\left(a\right)\neq 0$). Vậy f là một đơn ánh.	1,0
TH1: Nếu $f\left(x\right)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.	1,0
TH2: Nếu tồn tại a sao cho $f(a)\neq 0$. Thế $x=0,y=1$ vào đề bài ta được: $f\left(0\right)+f\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)\right)=f\left(0\right)+f\left(f\left(1\right)\right)$. Vì f là đơn ánh nên ta được: $f\left(0\right)=0$.	1,0
Mặt khác, thế $y=0$ vào đề bài ta được: $f\left(xf\left(0\right)\right)+f\left(f\left(x\right)+f\left(0\right)\right)=0.f\left(x\right)+f\left(x+f\left(0\right)\right),\forall x\in\mathbb{R}$.	1,0
Vì $f\left(0\right)=0$ nên $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.	1,0
Câu 6 (7,0 điểm): Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases}u_1=2020\\ u_{n+1}=\dfrac{2018n+2}{2019n+2}(u_n+1),\ \forall n=1,2,3,...\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.	

Ta có: $u_n > 0,\ \forall n = 1,2...$	0,5
Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2018n+2)(u_n+1) - (2019n+2)u_n}{2019n+2} = \dfrac{2018n+2-nu_n}{2019n+2}$	1,0
Ta đi chứng minh: $2018n + 2 - nu_n < 0 \Leftrightarrow nu_n > 2018n+2, \forall n = 2,3,4,...$ (*) Khi $n = 1$, dễ thấy mệnh đề (*) đúng.	0,5
Giả sử: $ku_k > 2018k + 2,\ \forall k = 2,3,4,...$	0,5
$(k+1)u_{k+1} = (k+1)\dfrac{2018k+2}{2019k+2}(u_k+1)$ $= \dfrac{k+1}{2019k+2}\left(2018ku_k + 2u_k + 2018k + 2\right)$	1,0
$> \dfrac{k+1}{2019k+2}\left[2018(2018k+2) + 2\dfrac{2018k+2}{k} + 2018k + 2\right]$ $= \dfrac{(k+1)(2018k+2)}{2019k+2}\left(2019 + 2\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{(k+1)(2018k+2)}{k}$	1,0
$= 2018k + 2 + 2018 + \dfrac{2}{k} > 2018k + 2020,\ \forall k = 2,3,4,...$	1,0
Vậy $u_{n+1} < u_n, \forall n = 2,3,4,...$ Mà (u_n) bị chặn dưới nên dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.	0,5
Gọi $L = \lim u_n$. Ta có: $L = \dfrac{2018}{2019}(L+1) \Leftrightarrow L = 2018$	1,0

Câu 7 ***(7,0 điểm)*** Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số, trong mỗi số đó các chữ số đều lớn hơn 1 và không có hai chữ số khác nhau cùng nhỏ hơn 7 đứng liền nhau?

Xét trường hợp tổng quát với số tự nhiên có n chữ số, với n là số nguyên dương. Gọi A_n, B_n lần lượt là tập các số tự nhiên có n chữ số thỏa yêu cầu đề bài mà chữ số tận cùng nhỏ hơn 7 và chữ số tận cùng lớn hơn 6.	0,5
Lấy một phần tử a thuộc A_n, có một cách thêm vào chữ số cuối cho a (thêm vào bên phải chữ số cuối cùng của a) để được một phần tử của A_{n+1} và có 3 cách thêm vào chữ số cuối cho a để được một phần tử của B_{n+1}.	0,5
Lấy một phần tử b thuộc B_n, có 5 cách thêm vào chữ số cuối cho b để được một phần tử của A_{n+1} và có 3 cách thêm vào chữ số cuối cho b để được một phần tử của B_{n+1}.	0,5

Ta có: $\begin{cases} \left\|A_{n+1}\right\| = \left\|A_n\right\| + 5\left\|B_n\right\| \\ \left\|B_{n+1}\right\| = 3\left\|A_n\right\| + 3\left\|B_n\right\| \end{cases}$.	1,0
Khi đó: $\left\|A_{n+1}\right\| + \left\|B_{n+1}\right\| = 4\left\|A_n\right\| + 8\left\|B_n\right\| = 4\left(\left\|A_n\right\| + \left\|B_n\right\|\right) + 4\left\|B_n\right\|$.	1,0
$= 4\left(\left\|A_n\right\| + \left\|B_n\right\|\right) + 4.3\left(\left\|A_{n-1}\right\| + \left\|B_{n-1}\right\|\right) = 4\left(\left\|A_n\right\| + \left\|B_n\right\|\right) + 12\left(\left\|A_{n-1}\right\| + \left\|B_{n-1}\right\|\right), n \geq 2$ với $\left\|A_1\right\| = 5, \left\|B_1\right\| = 3, \left\|A_2\right\| = 20, \left\|B_2\right\| = 24$	1,0
Kí hiệu $x_n = \left\|A_n\right\| + \left\|B_n\right\|$, ta được: $x_{n+2} = 4x_{n+1} + 12x_n$, trong đó $x_1 = 8, x_2 = 44$.	1,0
Sử dụng sai phân tuyến tính, ta được: $x_n = \frac{1}{4}\left[5.6^n - (-2)^n\right]$.	1,0
Áp dụng cho $n = 2018$, ta có $\frac{1}{4}\left(5.6^{2018} - 2^{2018}\right)$ số cần tìm.	0,5

……….HẾT……….