

**Câu 1 (2.0 điểm):** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}$ .

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ .

**Câu 2 (2.0 điểm):**

a) Giải phương trình:  $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$ .

b) Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases}$$
 (với m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa điều kiện  $x + y > 1$ .

**Câu 3 (1.5 điểm):** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn  $x + y + z = 2023$ .

Chứng minh rằng:  $x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+2022z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+2022x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 4 (3,5 điểm):** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Điểm E di động trên cạnh CD (khác C, D). M là giao điểm của AE với BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt CD tại N. I là trung điểm của đoạn thẳng MN. Đường phân giác của góc BAE cắt cạnh BC tại P. Chứng minh rằng:

a)  $BM \cdot DE = a^2$ .

b) AI vuông góc với MN và I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi E di động trên cạnh CD (khác C, D).

c)  $AP \leq 2EP$ .

**Câu 5 (1,0 điểm):** Cho  $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$  (với  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ).

Chứng minh rằng: P không phải là số chính phương.

-----HẾT-----

**Chú ý:** + Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

+ Thí sinh **không** được sử dụng máy tính cầm tay.

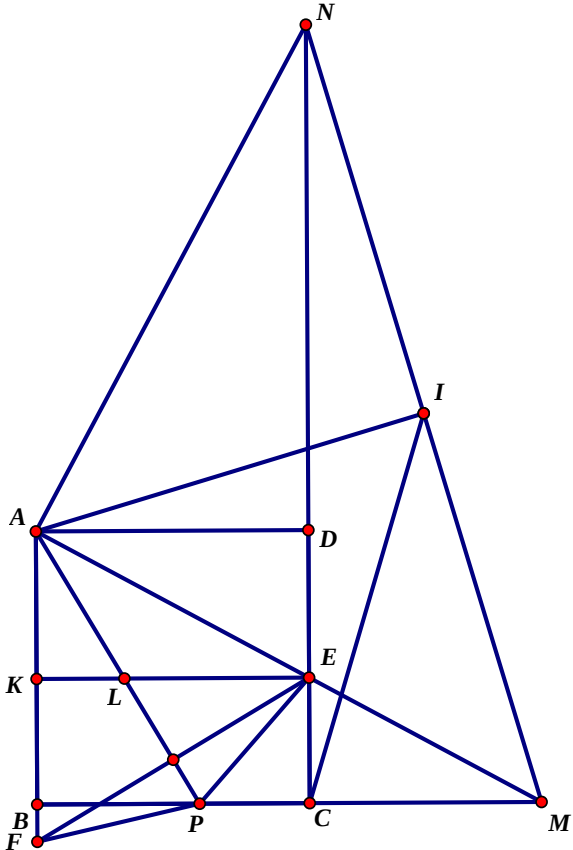
**YÊU CẦU CHUNG**

- \* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của thí sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.
- \* Trong mỗi bài, nếu thí sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.
- \* Ở câu 4 nếu thí sinh không vẽ hình thì cho 0 điểm.
- \* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.
- \* Thí sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.
- \* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

| Câu        | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Điểm       |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b>   | <p>Cho biểu thức <math>A = \left( \frac{2}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}</math></p> <p>a) Rút gọn biểu thức A.</p> <p>b) Tính giá trị biểu thức A khi <math>x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}</math>.</p> | <b>2.0</b> |
| <b>1.a</b> | Rút gọn biểu thức $A = \left( \frac{2}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}$                                                                                                                                                         | <b>1.0</b> |
|            | Điều kiện: $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                      | 0.25       |
|            | $A = \frac{4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1}$                                                                                                                                                                                        | 0.25       |
|            | $A = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} \cdot \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$                                                                                                                                                                                                                                  | 0.25       |
|            | $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}$<br>Vậy $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}$ với điều kiện $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$ .                                                                                                                                                                | 0.25       |
| <b>1.b</b> | Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ .                                                                                                                                                                                                                     | <b>1.0</b> |
|            | Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ , ta có :<br>$x^3 = 20+14\sqrt{2} + 20-14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})} \cdot x$                                                                                                                                             | 0.25       |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|            | $\Leftrightarrow x^3 = 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}.x$ $\Leftrightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.25       |
|            | $\Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+10) = 0$ $\Leftrightarrow x = 4 \text{ (do } x^2+4x+10 > 0\text{)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.25       |
|            | <p>Thay <math>x = 4</math> vào <math>A</math> ta được <math>A = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{4}+1}{2\sqrt{4}-1} = \frac{5}{3}</math></p> <p>Vậy <math>A = \frac{5}{3}</math> khi <math>x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                               | 0.25       |
| <b>2.a</b> | <b>Giải phương trình <math>x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>1.0</b> |
|            | <p>Điều kiện: <math>x \geq 1</math> (*).</p> <p>Ta có: <math>x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)</math></p> $\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1} + 1)(x + \sqrt{x-1} - 3) = 0$                                                                                                                                                                                          | 0.5        |
|            | $\Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ <p>Vậy phương trình có nghiệm <math>x = 2</math>.</p> | 0.5        |
| <b>2.b</b> | <p><b>Cho hệ phương trình <math>\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases}</math> (với <math>m</math> là tham số).</b></p> <p><b>Tìm tất cả các giá trị của <math>m</math> để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất <math>(x; y)</math> thỏa điều kiện <math>x + y &gt; 1</math>.</b></p>                                                                                                                                                                                         | <b>1.0</b> |
|            | <p>Ta có: <math>\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \text{ (1)} \\ y = \frac{24 - (m-1)x}{12} \text{ (2)} \end{cases}</math></p> <p>Thay (2) vào (1) ta được:</p> $[36 - (m-1)^2]x = 168 - 24m$ $\Leftrightarrow (m-7)(m+5)x = 24m - 168 \text{ (3)}$ <p>Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -5 \\ m \neq 7 \end{cases}$                                    | 0.25       |
|            | <p>Khi đó: <math>x = \frac{24m - 168}{(m-7)(m+5)} = \frac{24(m-7)}{(m-7)(m+5)} = \frac{24}{m+5}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.25       |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|   | Thay vào (2) ta được                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |
|   | $(m-1) \cdot \left( \frac{24}{m+5} \right) + 12y = 24 \Leftrightarrow 12y = 24 - \frac{24(m-1)}{m+5}$ $\Leftrightarrow y = 2 - \frac{2(m-1)}{m+5} \Leftrightarrow y = \frac{12}{m+5}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|   | Do đó: $x + y > 1 \Leftrightarrow \frac{24}{m+5} + \frac{12}{m+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{36-m-5}{m+5} > 0$<br>$\Leftrightarrow \frac{m-31}{m+5} < 0 \Leftrightarrow m-31 < 0 < m+5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.25 |
|   | $\Leftrightarrow -5 < m < 31$<br>Kết hợp với điều kiện ta có $-5 < m < 31$ và $m \neq 7$ .<br>Vậy $-5 < m < 31$ và $m \neq 7$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.25 |
| 3 | <b>Cho ba số thực dương <math>x, y, z</math> thỏa mãn <math>x + y + z = 2023</math>. Chứng minh rằng:</b> $x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+2022z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+2022x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1.5  |
|   | Ta sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc sau:<br>+ Cho ba số thực $a, b, c$ ta có:<br>$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (1)$ + Cho hai bộ số thực $(a_1, a_2, a_3)$ và $(b_1, b_2, b_3)$ ta có:<br>$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2$ $\geq 2(a_1b_1a_2b_2 + a_2b_2a_3b_3 + a_3b_3a_1b_1)$ $\Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ $\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \quad (2)$ | 0.25 |
|   | Ta chứng minh cho trường hợp tổng quát: Cho ba số thực $x, y, z$ dương và $x + y + z = k > 1$ .<br>Ta có bất đẳng thức sau: $\frac{xy}{x+(k-1)y} \leq \frac{(k-1)x+y}{k^2} \quad (3)$<br>Thật vậy, $(3) \Leftrightarrow (k-1)x^2 + xy + (k-1)^2xy + (k-1)y^2 - k^2xy \geq 0$<br>$\Leftrightarrow (k-1)(x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5  |
|   | Áp dụng (3) ta có: $x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+(k-1)z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+(k-1)x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+(k-1)y}}$ $\leq \frac{1}{k} \left( x \cdot \sqrt{(k-1)y+z} + y \cdot \sqrt{(k-1)z+x} + z \cdot \sqrt{(k-1)x+y} \right)$ $= \frac{1}{k} \left( \sqrt{x} \cdot \sqrt{(k-1)yx+zx} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{(k-1)zy+xy} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{(k-1)xz+yz} \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.25 |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |      |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|   | $\leq \frac{1}{k} \sqrt{(x+y+z)((k-1)yx+zx+(k-1)zy+xy+(k-1)xz+yz)} \text{ (theo (2))}$ $= \frac{1}{k} \sqrt{k^2(zx+xy+yz)}$ $= \sqrt{xy+yz+zx} \leq \sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{k}{\sqrt{3}} \text{ (theo (1))}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.25 |
|   | <p>Do đó: <math>x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+(k-1)z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+(k-1)x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+(k-1)y}} \leq \frac{k}{\sqrt{3}} \text{ (4)}</math></p> <p>Thay <math>k = 2023</math> ta được:</p> $x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+2022z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+2022x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}} \text{ (đpcm)}$ <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>x = y = z = \frac{2023}{3}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.25 |
| 4 | <p><b>Cho hình vuông <math>ABCD</math> có cạnh bằng <math>a</math>. Điểm <math>E</math> di động trên cạnh <math>CD</math> (khác <math>C, D</math>). <math>M</math> là giao điểm của <math>AE</math> với <math>BC</math>. Qua <math>A</math> kẻ đường thẳng vuông góc với <math>AE</math> cắt <math>CD</math> tại <math>N</math>. <math>I</math> là trung điểm của đoạn thẳng <math>MN</math>. Đường phân giác của góc <math>BAE</math> cắt cạnh <math>BC</math> tại <math>P</math>. Chứng minh rằng:</b></p> <p>a) <math>BM \cdot DE = a^2</math>.</p> <p>b) <math>AI</math> vuông góc với <math>MN</math> và <math>I</math> luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi <math>E</math> di động trên cạnh <math>CD</math> (khác <math>C, D</math>).</p> <p>c) <math>AP \leq 2EP</math>.</p> | 3.5  |
|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.25 |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |             |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>4.a</b> | $BM.DE = a^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1.0</b>  |
|            | <p>Xét tam giác <math>AEN</math> có: <math>EAN = 90^0</math>, <math>AD</math> là đường cao.</p> <p>Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông cho tam giác <math>AEN</math> ta có:</p> $DE.DN = AD^2 \Rightarrow DE.DN = a^2 \quad (1)$                                                                                                      | 0.5         |
|            | <p>Xét hai tam giác <math>ADN</math> và <math>MBA</math> ta có:</p> $ADN = ABM = 90^0$ $AD = AB = a$ $DAN = BAM \text{ (vì cùng phụ với góc } DAE \text{)}$ <p>Suy ra: <math>\triangle ADN = \triangle MBA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow DN = BM \quad (2)</math></p> <p>Từ (1), (2) suy ra: <math>BM.DE = a^2 \text{ (đpcm)}</math></p> | 0.5         |
| <b>4.b</b> | <b>AI vuông góc với MN và I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi E di động trên cạnh CD (khác C, D).</b>                                                                                                                                                                                                                          | <b>1.25</b> |
|            | Xét tam giác $AMN$ ta có: $AM = AN$ (theo câu a)), $AI$ là đường trung tuyến. Suy ra: $AI$ là đường cao của tam giác $AMN$ hay $AI \perp MN$ .                                                                                                                                                                                         | 0.25        |
|            | Xét tam giác $AMN$ ta có: $MAN = 90^0$ (giả thiết), $AI$ là đường trung tuyến.<br>Suy ra: $AI = \frac{MN}{2} \quad (3)$ .                                                                                                                                                                                                              | 0.25        |
|            | Xét tam giác $CMN$ ta có: $MCN = 90^0$ (giả thiết), $CI$ là đường trung tuyến.<br>Suy ra: $CI = \frac{MN}{2} \quad (4)$ .                                                                                                                                                                                                              | 0.25        |
|            | Từ (3), (4) suy ra: $AI = CI$ hay $I$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $AC \quad (5)$                                                                                                                                                                                                                                          | 0.25        |
|            | Mặt khác, $BD$ là đường trung trực của đoạn thẳng $AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) $(6)$<br>Từ (5), (6) suy ra: $I$ nằm trên đường thẳng $BD$ cố định (đpcm)                                                                                                                                                                             | 0.25        |
| <b>4.c</b> | $AP \leq 2EP$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1.0</b>  |
|            | <p>Kẻ <math>EF \perp AP \text{ (} F \in AB \text{)}, EK \perp AB \text{ (} K \in AB \text{)} \quad (7)</math></p> <p>Xét tứ giác <math>BCEK</math> có <math>B = C = K = 90^0</math> nên <math>BCEK</math> là hình chữ nhật.</p> <p>Suy ra: <math>EK = BC = a \quad (8)</math></p>                                                      | 0.5         |
|            | Gọi $L$ là giao điểm của $AP$ với $EK$ . Ta có: $BAP = KEF$ (vì cùng phụ với góc $AKL \quad (9)$                                                                                                                                                                                                                                       | 0.25        |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                |            |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|   | Từ (7), (8), (9) suy ra: $\triangle ABP = \triangle EKF \Rightarrow AP = EF$ (10)                                                                                                                                                              |            |
|   | Vì $AP$ vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác $AEF$ nên $AP$ là đường trung trực của đoạn thẳng $EF$ . Suy ra: $PE = PF$ (11)<br>Từ (10), (11) ta có: $AP = EF \leq PE + PF = PE + PE = 2PE \Leftrightarrow AP \leq 2PE$ (đpcm) | 0.25       |
| 5 | <b>Cho <math>P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2</math> (với <math>n \in \mathbb{N}, n &gt; 1</math>). Chứng minh <math>P</math> không phải là số chính phương.</b>                                                                                    | <b>1.0</b> |
|   | Ta có: $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$                                                                                                                                                                                | 0.25       |
|   | Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$                                                                                                                                                                       | 0.25       |
|   | và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$                                                                                                                                                                                                         | 0.25       |
|   | Do đó: $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương<br>Vậy $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.                                                                                         | 0.25       |