

ĐỀ CHÍNH THỨC

Khóa ngày 06 tháng 4 năm 2021

Môn thi: TOÁN - Vòng 1

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang và 05 câu.

SỐ BÁO DANH:.....

Câu 1. (2,0 điểm).

a. Giải phương trình $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

b. Chứng minh rằng phương trình $(m^2 - m + 1)x^{2020} + 2x - 2 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m .

Câu 2. (2,0 điểm).

a. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $(1 + x^2 - x^3)^n$ biết n là số nguyên lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1).n.C_n^n = 64.n(n-1)$.

b. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số. Một số thuộc S được gọi là “số đẹp” nếu chữ số ở hàng trăm bằng trung bình cộng của hai chữ số ở hàng đơn vị và hàng chục nghìn. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số được chọn là “số đẹp”.

Câu 3. (2,0 điểm).

a. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2020)^{2021} \sqrt{1 + 2021x} - 2020}{x}$.

b. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = -2, u_2 = -1 \text{ và } u_{n+1} = \sqrt[3]{n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Tính u_{2021} .

Câu 4. (3,0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BB' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (MNC') .

b. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNC') và (ABC) . Từ đó tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a.

c. Gọi (α) là mặt phẳng thay đổi và luôn đi qua trung điểm I của $B'G$ và cắt các cạnh $B'A, B'B, B'C$ lần lượt tại X, Y, Z (không trùng B'). Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $T = \frac{B'A}{B'X} \cdot \frac{B'B}{B'Y} \cdot \frac{B'C}{B'Z}$.

Câu 5. (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C \cdot \cos A}{\cos B}} > 2.$$

..... HẾT

HƯỚNG DẪN CHẤM

Khóa ngày 06 tháng 4 năm 2021

Môn thi: TOÁN

Vòng 1

Đáp án này gồm có 06 trang

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

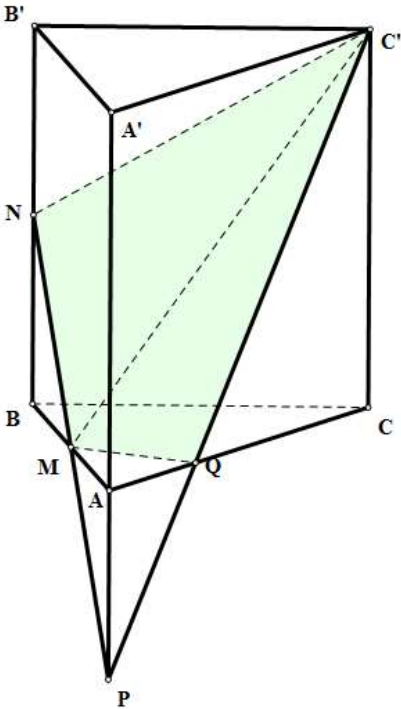
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng câu.

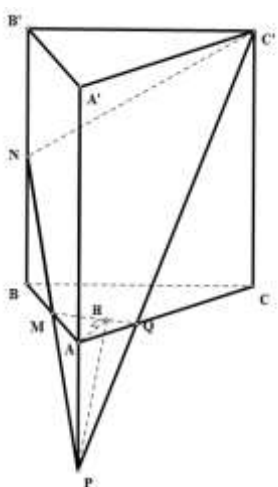
* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.

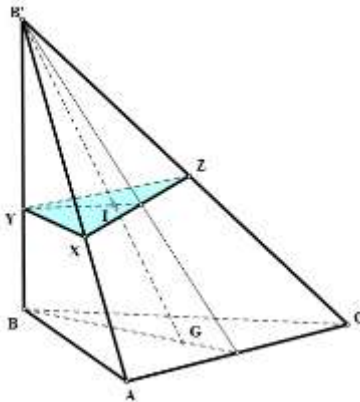
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a	Giải phương trình: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3}\cos^2 x = \sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos^2 \frac{x}{2} - 1, (1).$	1,0đ
	$(1) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \frac{1 + \cos x}{2} - 1$ $\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2(1 + \cos x) - 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$ Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$	0,25

Câu 1b	Chứng minh rằng pt $(m^2 - m + 1)x^{2020} + 2x - 2 = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m.	1,0đ
	Xét hàm số $f(x) = (m^2 - m + 1)x^{2020} + 2x - 2$ liên tục trên $\mathbf{R}$	0,25
	Có $f(0) = -2 < 0$	0,25
	và $f(1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$	0,25
	Vì $f(0).f(1) < 0, \forall m$ nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0,1)$ với mọi m . Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m	0,25
Câu 2a	Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $(1 + x^2 - x^3)^n$ biết n là số nguyên lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức $1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1).n.C_n^n = 64n.(n-1)$.	1,0đ
	Ta có công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ với $n \geq k \geq 1; k, n \in N^*$ Thật vậy: $kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = nC_{n-1}^{k-1}$ Với $n \geq k \geq 2, n > 2; k, n \in N^*$ ta áp dụng công thức trên thu được $(k-1).k.C_n^k = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$	0,25
	Khi đó: $1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1).n.C_n^n$ $= (n-1).n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-2}^{n-2}) = (n-1).n.2^{n-2}$ Từ đây ta có $2^{n-2} = 64$ suy ra $n = 8$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25
	Với $n = 8$ ta có $(1 + x^2 - x^3)^8 = [1 + x^2(1-x)]^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \cdot (1-x)^k$	0,25
	Số hạng chứa x^8 trong khai triển là $C_8^3.C_3^2 x^8 + C_8^4.C_4^0 x^8 = (C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0)x^8$ Vậy hệ số của trong khai triển là $C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238$.	0,25
Câu 2b	Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số. Một số thuộc S được gọi là “số đẹp” nếu chữ số ở hàng trăm bằng trung bình cộng của hai chữ số ở hàng đơn vị và hàng chục nghìn. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số lấy được là “số đẹp”.	1,0đ
	Số phần tử của không gian mẫu là $ \Omega = 90000$	0,25

	Gọi k là “số đẹp” thuộc S. Khi đó, k có dạng $k = \overline{abcde}$, $a \neq 0, c = \frac{a+e}{2}$ Từ giả thiết $c = \frac{a+e}{2}$. Chứng tỏ $a+e$ là một số chẵn. Vì thế hai số a, e hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ.	0,25
	<i>Trường hợp 1:</i> cả hai số a, e đều chẵn. Khi đó: a có 4 cách chọn, e có 5 cách chọn. Ứng với mỗi cặp số a, e ta chọn được một số c duy nhất. Nên trong trường hợp này có: $4 \times 10 \times 1 \times 10 \times 5 = 2000$ số. <i>Trường hợp 2:</i> cả hai số a, e đều lẻ. Khi đó: a có 5 cách chọn, e có 5 cách chọn. Ứng với mỗi cặp số a, e ta chọn được một số c duy nhất. Nên trong trường hợp này có: $5 \times 10 \times 1 \times 10 \times 5 = 2500$ số. Nên có tất cả $2000 + 2500 = 4500$ số “đẹp” thuộc S.	0,25
	Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4500}{90000} = \frac{1}{20}$	0,25
Câu 3a	Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 2020) \cdot \sqrt[2021]{1 + 2021x} - 2020}{x}$	1,0đ
	Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cdot \sqrt[2021]{1 + 2021x} + \frac{2020(\sqrt[2021]{1 + 2021x} - 1)}{x} \right]$	0,25
	Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \sqrt[2021]{1 + 2021x}) = 0$ $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020(\sqrt[2021]{1 + 2021x} - 1)}{x}$ Đặt $t = \sqrt[2021]{1 + 2021x} \Rightarrow x = \frac{t^{2021} - 1}{2021}$; khi $x \rightarrow 0$ thì $t \rightarrow 1$	0,25
	Suy ra $B = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2020(t - 1)}{\frac{t^{2021} - 1}{2021}} = 2020 \cdot 2021 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^{2020} + t^{2019} + \dots + t + 1} = \frac{2020 \cdot 2021}{2021} = 2020$	0,25
	Vậy $L = A + B = 2020$.	0,25

Câu 3b	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -2, u_2 = -1$ và $u_{n+1} = \sqrt[3]{n(u_n^2 + 1) + 2u_{n-1}}$ với mọi $n \geq 2$. Tính u_{2021} .	1,0đ
	Ta tính được $u_3 = 0, u_4 = 1, u_5 = 2$. Từ đây ta dự đoán $u_n = n - 3, \forall n \geq 1$ (2)	0,25
	Thấy vậy: (2) đúng với $n = 1$. Giả sử (2) đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k = k - 3$ đúng. Ta xét $u_{k+1} = \sqrt[3]{k(u_k^2 + 1) + 2u_{k-1}} = \sqrt[3]{k[(k-3)^2 + 1] + 2(k-4)}$ $= \sqrt[3]{k^3 - 6k^2 + 12k - 8} = \sqrt[3]{(k-2)^3} = k - 2$ Chứng tỏ (2) đúng với $n = k + 1$. Vậy (2) đúng với mọi số nguyên dương n Từ đây, ta tính được $u_{2021} = 2021 - 3 = 2018$	0,5
Câu 4	Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BB' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .	3,0đ
	 (hình vẽ)	0,5
4a	Trong $(ABB'A')$, Gọi $P = MN \cap AA'$.	0,25
	Trong $(ACC'A')$, Gọi $Q = AC \cap PC'$.	0,25
	Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác $NMQC'$.	0,25

	 Trong (ABC) kẻ $AH \perp MQ, H \in MQ$ Ta có $MQ \perp AH, MQ \perp AP \Rightarrow MQ \perp (AHP)$ Nên góc giữa hai mặt phẳng (MNC') và (ABC) là góc $\varphi = AHP$ (vì tam giác AHP vuông tại A)	0,25
4b	Vì $AQ // A'C'$ nên $\frac{AQ}{A'C'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow AQ = \frac{a}{3}$. Từ ΔAQM vuông tại A nên $AH = \frac{a}{\sqrt{13}}$. Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông AHP ta có: Ta có $\cos \varphi = \cos AHP = \frac{AH}{PH} = \frac{AH}{\sqrt{AH^2 + AP^2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\frac{a^2}{13} + \frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$	0,25
	Tứ giác $BMQC$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $NMQC'$ lên (ABC) nên $S_{NMQC'} = \frac{S_{BMQC}}{\cos \varphi}.$	0,25
	Mà $S_{BMQC} = S_{ABC} - S_{AMQ} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} = \frac{5a^2}{12}$. Vậy $S_{NMQC'} = \frac{S_{BMQC}}{\cos \varphi} = \frac{5a^2 \sqrt{30}}{24}$	0,25
4c	Trước hết ta có bổ đề sau: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) bất kỳ cắt các cạnh SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', I (không trùng S). Khi đó: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SI}$ Thật vậy: Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG} \Rightarrow \frac{SA}{SA'} \cdot \vec{SA'} + \frac{SB}{SB'} \cdot \vec{SB'} + \frac{SC}{SC'} \cdot \vec{SC'} = 3 \frac{SG}{SI} \cdot \vec{SI}$ Vì 4 điểm A', B', C', I đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SI}$ Bổ đề được chứng minh xong. Áp dụng bổ đề trên ta có:	0,25

	 $\frac{B'A}{B'X} + \frac{B'B}{B'Y} + \frac{B'C}{B'Z} = 3 \frac{B'G}{B'I} = 6$ Khi đó: áp dụng BĐT Cauchy ta có $6 = \frac{B'A}{B'X} + \frac{B'B}{B'Y} + \frac{B'C}{B'Z} \geq 3 \sqrt{\frac{B'A}{B'X} \cdot \frac{B'B}{B'Y} \cdot \frac{B'C}{B'Z}} = 3\sqrt{T}$ $\Rightarrow T \leq 8$	0,25
	Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 8 khi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của $B'A, B'B, B'C$ hay $(\alpha) // (ABC)$	0,25
Câu 5	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C \cdot \cos A}{\cos B}} > 2$	1,0đ
	Ta có bổ đề 1: Trong tam giác ABC có ba góc nhọn, ta có : $\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C}, (*)$ Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow \cos B \cdot \cos C \cdot (\tan B + \tan C) = \tan A \cdot \cos A$ $\Leftrightarrow \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C = \sin A$ $\Leftrightarrow \sin(B + C) = \sin A$ $\Leftrightarrow \sin(\pi - A) = \sin A \text{ (đúng). Bổ đề được chứng minh xong.}$	0,25
	Ta có bổ đề 2: Với mọi $x, y, z > 0$, ta luôn có $\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z}, (**)$ Thật vậy: $(**) \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 4x(y+z) \Leftrightarrow (y+z-x)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$	0,25
	Đặt $a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$, dễ dàng có $a, b, c > 0$. Áp dụng bổ đề 1, bài toán được viết lại: Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ Áp dụng bổ đề 2, ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$	0,25
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b+c, b=a+c, c=a+b$ hay $a=b=c=0$ (vô lý). Nên $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.	0,25