

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Họ và tên:.....

LỚP 11 THPT

SỐ BÁO DANH:.....

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang.

Câu 1 (2.0 điểm)

a. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2}{\sin x} = 0.$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3.\sqrt[3]{x^2 y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5.\sqrt[3]{x^4 y} = y^2 + x^2 \end{cases}$$

Câu 2 (2.0 điểm)

a. Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}.$

b. Một hộp đựng chín quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.**Câu 3 (2.0 điểm)**a. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$u_1 = 5, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2 + n - 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}; n \geq 1.$$

Tính giới hạn $\lim(n.u_n)$.b. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^{2n} + 3n^2 + 7$ là một số chính phương.**Câu 4 (3.0 điểm)**Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D$.a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG) . Thiết diện đó là hình gì?b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.**Câu 5 (1.0 điểm)** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2$$

.....**HẾT**.....

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

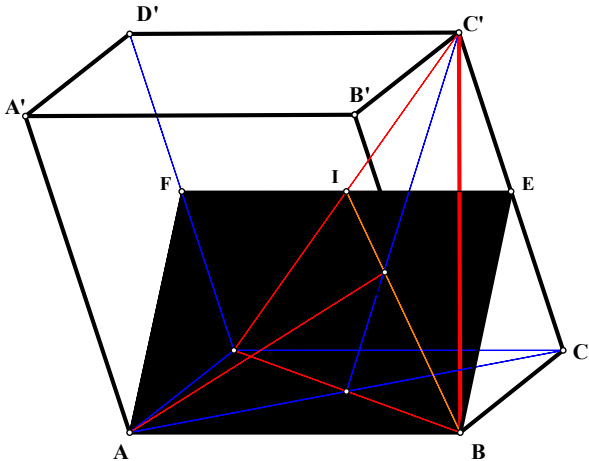
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

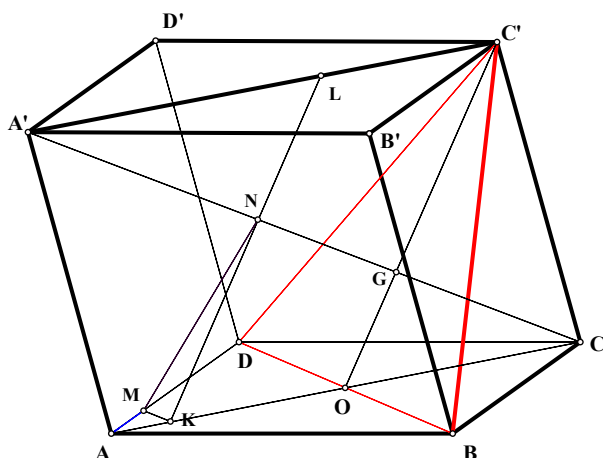
* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	a. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2}{\sin x} = 0.$	1,0
	Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi.$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x - 3\sin x - \cos x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - \cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x + \sin x = 1 \end{cases}$	0,25
	$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
	b. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2 y^5} = 4(y^2 - x^2) \\ 5\sqrt[3]{x^4 y} = y^2 + x^2 \end{cases}$	1,0

	Ta thấy $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình	0,25
	Với $(x; y) \neq (0; 0)$, ta có: $15x^2y^2 = 4(y^2 + x^2)(y^2 - x^2) \Leftrightarrow (4x^2 - y^2)(x^2 + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2x$	0,25
	TH1: $y = 2x$, ta có: $3\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4(4x^2 - x^2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4x^2$ $\Leftrightarrow 32x^7 = 64x^6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$ (vì $(x; y) \neq (0; 0)$) Do đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 4)$	0,25
	TH2: $y = -2x$, ta có: $-3\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4(4x^2 - x^2) \Leftrightarrow -\sqrt[3]{x^2 \cdot 32x^5} = 4x^2$ $\Leftrightarrow -32x^7 = 64x^6 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$ (vì $(x; y) \neq (0; 0)$) Do đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; 4)$ Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$.	0,25
Câu 2 (2,0 điểm)	a. Tính : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2}$	1,0
	Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - x^4 + 3x - 6}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{8x+8} - (x+3)}{(x-1)^2} - \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2} \right]$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x+8} - (x+3)}{(x-1)^2} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x+8 - (x+3)^2}{(x-1)^2(\sqrt{8x+8} + (x+3))} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2}$	
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2(\sqrt{8x+8} + x + 3)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2}$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{8x+8} + x + 3} - \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)$	
	$= \frac{-1}{8} - 6 = -\frac{49}{8}$	0,25
	b. Một hộp đựng chín quả cầu được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu quả cầu để xác suất có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$	1,0
	Giả sử ta lấy ra x quả cầu ($1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$), số cách chọn x quả cầu từ 9 quả cầu trong hộp là C_9^x nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^x$. Gọi A là biến cố “trong số x quả cầu lấy ra, có ít nhất một quả cầu ghi số chia hết cho 4”, thế thì biến cố đối của A là $\bar{A}$: “trong số x quả cầu lấy ra, không có quả cầu nào ghi số chia hết cho 4”.	0,25

Câu 3 (2,0 điểm)	Số cách chọn tương ứng với biến cố $\bar{A}$ là $n(\bar{A}) = C_7^x$. Ta có: $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_7^x}{C_9^x} = \frac{(9-x)(8-x)}{72} = \frac{x^2 - 17x + 72}{72}$	0,25
	Do đó: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{x^2 - 17x + 72}{72} < \frac{1}{6}$. hay $x^2 - 17x + 60 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 12$	0,25
	Vì $1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$ nên $6 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của x là 6. Vậy số quả cầu phải lấy ra ít nhất mà ta phải tìm là 6 quả cầu.	0,25
	a. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 5, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2 + n - 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}; n \geq 1$. Tìm $\lim(n.u_n)$	1.0
	Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}$ Hay: $u_{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{n}\right)$	0.25
	Đặt $v_n = u_n - \frac{2}{n}; n \geq 1$. Khi đó ta có dãy số $(v_n), v_1 = 3; v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n; n \geq 1$ là một cấp số nhân có $v_1 = 3$, công bội $q = \frac{1}{2}$. Nên $v_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ hay $u_n = \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2}{n}; n \geq 1 \Rightarrow n.u_n = \frac{3n}{2^{n-1}} + 2$.	0.25
	Bằng quy nạp ta chứng minh được $2^{n+1} > n^2; \forall n \geq 1$. (1) Thật vậy: Với $n = 1, n = 2, n = 3$, (1) đúng Giả sử (1) đúng với $n = k, (k \geq 3)$ tức $2^{k+1} > k^2$ đúng Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, Thật vậy: $2^{k+2} = 2.2^{k+1} > 2.k^2 > (k+1)^2, \forall k \geq 3$	0.25
	Suy ra: $0 < \frac{3n}{2^{n-1}} < \frac{12}{n}$. Từ đây suy ra: $\lim \frac{3n}{2^{n-1}} = 0$. Khi đó $\lim(n.u_n) = \lim\left(\frac{3n}{2^{n-1}} + 2\right) = 2$.	0.25
	b. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^{2n} + 3n^2 + 7$ là một số chính phương.	1.0
	Nếu $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2$ với $b \in \mathbb{N}^*$ thì $b^2 > 3^{2n}$ hay $b > 3^n$. Điều này chứng tỏ: $b \geq 3^n + 1$.	0.25
	Do đó: $3^{2n} + 3n^2 + 7 = b^2 \geq (3^n + 1)^2 = 3^{2n} + 2.3^n + 1$. Suy ra $2.3^n \leq 3.n^2 + 6$ (*)	0.25

	Nếu $n \geq 3$ thì (*) không xảy ra vì: $2.3^n = 2.(1+2)^n = 2(C_n^0 + C_n^1.2 + C_n^2.2^2 + \dots)$ $= 2\left(1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}.2^2 + \dots\right)$ $> 2 + 4n + 4n^2 - 4n = 3n^2 + (n^2 + 2)$ $\geq 3n^2 + 11 > 3n^2 + 6$ Do đó $n = 1$ hoặc $n = 2$.	0.25
	Khi $n = 1$ ta tính được $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 19$ không phải là số chính phương Khi $n = 2$ ta tính được $3^{2n} + 3n^2 + 7 = 100$ là số chính phương. Kết luận: $n = 2$	0.25
Câu 4 (3,0 điểm)	Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D$.	3,0
	a. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABG). Thiết diện đó là hình gì?	1,5
		0,5
	Trong mặt phẳng $(BC'D)$ kéo dài BG cắt $C'D$ tại I.	0,25
	Khi đó: $\begin{cases} (ABG) \cap (CDD'C') = Ix \\ AB \subset (ABG), CD \subset (CDD'C') \Rightarrow Ix \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$	0,25
	Từ đó, trong $(CDD'C')$ kẻ $Ix \parallel CD$ cắt CC', DD' lần lượt tại E, F	0,25
	Vậy thiết diện cần tìm là hình bình hành $ABEF$ (Vì $EF = CD = AB$ và EF song song với AB)	0,25
	b. Hai điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn $AD, A'C$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$, biết $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính tỉ số $\frac{CN}{CA'}$.	1,5



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta thấy $A'C$ đi qua G .

Khi đó, qua M kẻ đường thẳng song song với BD và cắt AC tại K .

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, gọi $L = KN \cap A'C'$, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} MN \parallel (BC'D) \\ MK \parallel (BC'D) \end{array} \right\} \Rightarrow (MNK) \parallel (BC'D) \Rightarrow KN \parallel (BC'D) \Rightarrow KN \parallel OC'$$

Mặt khác, theo giả thiết, ta có: $\frac{AK}{AO} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{KO}{AO} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{KO}{AC} = \frac{3}{8} \text{ và } \frac{KC}{AC} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Vì } KO = LC', AC = A'C' \text{ nên } \frac{LC'}{A'C'} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{A'L}{A'C'} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Mà } \frac{A'L}{KC} = \frac{A'L}{A'C'} \cdot \frac{AC}{KC} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{A'N}{NC} = \frac{5}{7}$$

$$\text{Vậy } \frac{CN}{CA'} = \frac{7}{12}.$$

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2 \quad (1)$$

Ta chứng minh bổ đề sau:

Cho các số thực dương m, n khi đó: $\sqrt[3]{4(m+n)} \geq \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}$ (2) ,

Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi $m = n$.

Thật vậy: Đặt $x = \sqrt[3]{m}, y = \sqrt[3]{n}$; $(x, y > 0)$.

Bất đẳng thức (2) được viết lại $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$. Ta xét:

$$4(x^3 + y^3) - (x + y)^3 = 3(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3)$$

$$= 3(x - y)(x^2 - y^2)$$

$$= 3(x - y)^2(x + y) \geq 0; \forall x, y > 0$$

Câu 5
(1.0 điểm)

0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

1,0

0,25

	Nên ta có: $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ hay $\sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$ hay bất đẳng thức (2) ở bổ đề được chứng minh xong.	
	Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} < 1$ Sử dụng bất đẳng thức (2) ở bổ đề trên ta có: $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4((4a+4b)+c)}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4(a+b)} + \sqrt[3]{c}} \leq \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ Tương tự: $\sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} \leq \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}};$ $\sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} \leq \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ Từ đây ta có: $\sqrt[3]{\frac{a}{16a+16b+4c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{16b+16c+4a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{16c+16a+4b}} \leq 1 \quad (3)$	0,25 0.25
	Đẳng thức (3) xảy ra khi $4a + 4b = c, 4b + 4c = a, 4c + 4a = b$ nên $8(a + b + c) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0$ mâu thuẫn. Chứng tỏ dấu “=” không xảy ra. Vậy $\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2$	0,25