

Câu I (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{6x^2 - 4x + 2018}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4}}$ có tập xác

định là $\mathbb{R}$.

2) Cho hai hàm số $y = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ và $y = 2x + 3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ).

Câu II (3,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$
- 2) Giải bất phương trình $\sqrt{11x^2 - 19x - 19} - \sqrt{x^2 - x - 6} < 2\sqrt{2x+1}$
- 3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(4xy + y + 4) = y^2(2y + 5) - 1 \\ 2xy(x - 2y) + x - 14y = 0 \end{cases}$

Câu III (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có $AB = 6; BC = 7; CA = 5$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2MB$ và N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$). Tìm k sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng BN .

2) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và p là nửa chu vi của tam giác. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Biết $\frac{c(p-a)}{IA^2} + \frac{a(p-b)}{IB^2} + \frac{b(p-c)}{IC^2} = \frac{9}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

3) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 1 = 0$. Biết phương trình đường thẳng BD là $x - 7y + 14 = 0$ và đường thẳng AC đi qua điểm $M(2,1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Câu IV (1,0 điểm)

Một xưởng sản xuất có hai máy, sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I cần máy thứ nhất làm việc trong 3 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại II cần máy thứ nhất làm việc trong 1 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Mỗi máy không đồng thời làm hai loại sản phẩm cùng lúc. Một ngày máy thứ nhất làm việc không quá 6 giờ, máy thứ hai làm việc không quá 4 giờ. Hỏi một ngày nên sản xuất bao nhiêu tấn mỗi loại sản phẩm để tiền lãi lớn nhất?

Câu V (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ thì:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{12}{a^2+63} + \frac{12}{b^2+63} + \frac{12}{c^2+63}.$$

..... Hết

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

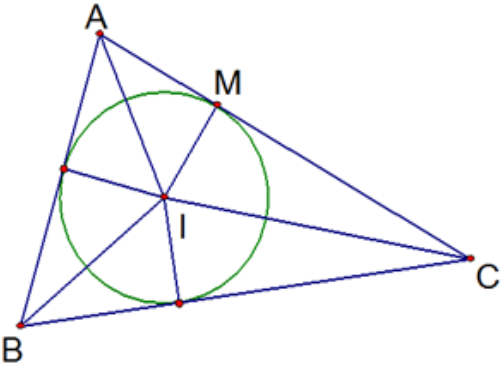
Giám thị coi thi số 1:

Giám thị coi thi số 2:

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.1 1,0 đ	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ $y = \frac{6x^2 - 4x + 2018}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4}}$	
	Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.	0,25
	Với $m = 1$, ta có $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.	0,25
	Với $m \neq 1, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 4(m-1) < 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)(m-5) < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 1 < m < 5$. Vậy $1 < m < 5$.	0,25
Câu I.2 1,0 đ	Cho hàm số $y = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ và hàm số $y = 2x + 3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ)	
	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $x^2 - 2(m-1)x - 2m = 2x + 3$ hay $x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 (*)$	0,25
	Ta có: $\Delta' = m^2 + 2m + 3 > 0$ với mọi m nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.	0,25
	Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (*). Khi đó $A(x_A; 2x_A + 3), B(x_B; 2x_B + 3)$ Ta có $\overrightarrow{OA} = (x_A; 2x_A + 3), \overrightarrow{OB} = (x_B; 2x_B + 3)$. $OA^2 + OB^2 = x_A^2 + (2x_A + 3)^2 + x_B^2 + (2x_B + 3)^2$ $= 5(x_A^2 + x_B^2) + 12(x_A + x_B) + 18$ $= 5(x_A + x_B)^2 + 12(x_A + x_B) + 18 - 10x_Ax_B \quad (1)$	0,25
	Theo định lý Vi-et ta có $x_A + x_B = 2m, x_Ax_B = -2m - 3$ Khi đó (1) trở thành $OA^2 + OB^2 = 20m^2 + 44m + 48 = 20\left(m + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{119}{5}$ Tìm được $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{119}{5}$ khi $m = -\frac{11}{10}$. Vậy $m = -\frac{11}{10}$ là giá trị của m cần tìm.	0,25

Câu II.1 1,0 đ	Giải phương trình: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$	
	Điều kiện: $\frac{4}{5} \leq x \leq 5$ (*) $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - (7-x) + 3(\sqrt{5x-4} - x) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x} = 0$ $\Leftrightarrow (-4+5x-x^2) \left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4}+x} \right) = 0$ (**)	0,25
	do $\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4}+x} > 0 \quad \forall x \in [\frac{4}{5}, 5]$ nên (**) $\Leftrightarrow -4+5x-x^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu điều kiện thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$	0,25
Câu II.2 1,0 đ	Giải bất phương trình $\sqrt{11x^2-19x-19} - \sqrt{x^2-x-6} < 2\sqrt{2x+1}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-6 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 11x^2-19x-19 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$	0,25
	Bất phương trình đã cho tương đương với $11x^2-19x-19 < [\sqrt{(x+2)(x-3+2\sqrt{2x+1})}]^2$ $\Leftrightarrow 10x^2-26x-17 < 4\sqrt{(2x+1)(x-3)}\sqrt{x+2}$	0,25
	$\Leftrightarrow 5(2x^2-5x-3) - 4\sqrt{2x^2-5x-3}\sqrt{x+2} - (x+2) < 0$ $\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{2x^2-5x-3}{x+2} - 4\sqrt{\frac{2x^2-5x-3}{x+2}} - 1 < 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2-5x-3}{x+2}} < 1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2-5x-3 < x+2 \Leftrightarrow 2x^2-6x-5 < 0$ Ta được $\frac{3-\sqrt{19}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{19}}{2}$ Kết hợp điều kiện $x \geq 3$ được $3 \leq x < \frac{3+\sqrt{19}}{2}$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [3; \frac{3+\sqrt{19}}{2})$	0,25

Câu II. 3 1,0 đ	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(4xy + y + 4) = y^2(2y + 5) - 1 \\ 2xy(x - 2y) + x - 14y = 0 \end{cases}$	
	Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (2xy + 1)^2 + y^2(x - 2y) = 5y^2(1) \\ (x - 2y)(2xy + 1) = 12y(2) \end{cases}$	0,25
	Xét $y = 0$ không là nghiệm hpt Xét $y \neq 0$ chia 2 vế phương trình (1) cho y^2 , chia 2 vế phương trình (2) cho y ta được: $\begin{cases} \left(2x + \frac{1}{y}\right)^2 + (x - 2y) = 5 \\ (x - 2y)\left(2x + \frac{1}{y}\right) = 12 \end{cases}$	0,25
	Đặt $\begin{cases} a = 2x + \frac{1}{y} \\ b = x - 2y \end{cases}$ có HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b = 5 \\ ab = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$	0,25
	hay $\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = -3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ Giải hệ ta được nghiệm $(-2; 1)$ và $\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{4}\right)$	0,25
Câu III.1 1,0 đ	Cho tam giác ABC có $AB = 6$; $BC = 7$; $CA = 5$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2MB$; N thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để CM vuông góc với BN	
	$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$	0,25
	Suy ra $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2k}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 - k\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$	0,25
	$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 6$	0,25
	$BN \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \frac{2k}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 - k\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2k}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 36 - 25k + 6 = 0 \Leftrightarrow -21k - 18 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{6}{7}$	0,25
Câu III.2 1,0 đ	Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và p là nửa chu vi của tam giác. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Biết $\frac{c(p-a)}{IA^2} + \frac{a(p-b)}{IB^2} + \frac{b(p-c)}{IC^2} = \frac{9}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.	

	 Gọi M là tiếp điểm của AC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có $AM = p - a, IM = r$. Áp dụng định lí Pitago trong tam giác AIM ta có $IA^2 = AM^2 + MI^2 = (p - a)^2 + r^2$	0,25
	Gọi S là diện tích tam giác ABC thì $r = \frac{S}{p}$ nên $IA^2 = (p - a)^2 + \left(\frac{S}{p}\right)^2$	0,25
	Mà $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ nên $IA^2 = (p - a)^2 + \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p} = \frac{(p - a)bc}{p}$ Suy ra $\frac{c(p - a)}{IA^2} = \frac{p}{b}$. Tương tự $\frac{a(p - b)}{IB^2} = \frac{p}{c}$ và $\frac{b(p - c)}{IC^2} = \frac{p}{a}$.	0,25
	Từ đó $\frac{c(p - a)}{IA^2} + \frac{a(p - b)}{IB^2} + \frac{b(p - c)}{IC^2} = \frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} = \frac{1}{2}(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{2}.$ Dấu bằng đạt được khi $a = b = c$ Vậy $\frac{c(p - a)}{IA^2} + \frac{a(p - b)}{IB^2} + \frac{b(p - c)}{IC^2} = \frac{9}{2}$ chỉ khi tam giác ABC đều.	0,25
Câu III.3 1,0 đ	Trong mặt phẳng tọa độ C, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AB: $x - 2y + 1 = 0$, phương trình đường thẳng BD: $x - 7y + 14 = 0$, đường thẳng AC đi qua $M(2; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.	
	Do B là giao của AB và BD nên tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right)$	0,25
	Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên góc giữa hai đường thẳng AC và AB bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BD. Giả sử $\vec{n}_{AC} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ là VTPT của AC. Khi đó $ \cos(\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{BD}) = \cos(\vec{n}_{AC}, \vec{n}_{AB}) $ $\Leftrightarrow a - 2b = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$ $\Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -\frac{b}{7} \end{cases}$	0,25
	+ Với $a = -b$. Chọn $a = 1, b = -1$.	

	Phương trình AC: $x - y - 1 = 0$ $A = AB \cap AC$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3; 2)$ Gọi I là giao của AC và BD thì tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ Do I trung điểm AC và BD nên tính được $C(4; 3); D(\frac{14}{5}; \frac{12}{5})$	0,25
	+ Với $b = -7a$ (Loại vì khi đó AC không cắt BD)	0,25
Câu IV 1,0 đ	Một xưởng sản xuất có hai máy sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 1,6 triệu đồng. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I thì máy thứ nhất làm việc trong 3 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại II thì máy thứ nhất làm việc trong 1 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Mỗi máy không đồng thời làm hai loại sản phẩm cùng lúc. Một ngày máy thứ nhất làm việc không quá 6 giờ, máy thứ hai làm việc không quá 4 giờ. Hỏi một ngày sản xuất bao nhiêu tấn mỗi loại sản phẩm để tiền lãi lớn nhất?	
	Gọi x, y là số tấn sản phẩm loại I, II cần sản xuất trong một ngày ($x; y \geq 0$). Tiền lãi một ngày là $L = 2x + 1,6y$ (triệu đồng). Một ngày máy thứ nhất làm việc $3x + y$ giờ, máy thứ hai làm việc $x + y$ giờ. Theo gt có: $\begin{cases} x; y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$	0,25
	Khi đó bài toán trở thành tìm $x; y$ thỏa mãn hệ trên sao cho $L = 2x + 1,6y$ đạt giá trị lớn nhất	0,25
	Vẽ các đường thẳng $3x + y = 6, x + y = 4$. Ta có các điểm $M(x; y)$ với $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình trên thuộc miền trong tứ giác OABC, kể cả các điểm trên cạnh tứ giác.	0,25
	L đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh của tứ giác. Thay tọa độ các điểm $O(0; 0), A(2; 0), B(1; 3), C(0; 4)$ vào biểu thức L ta được L đạt giá trị lớn nhất tại $B(1; 3)$. Khi đó $L = 2x + 1,6y = 2.1 + 1,6.3 = 6,8$. Vậy để thu được tiền lãi cao nhất thì mỗi ngày sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II	0,25

Câu V 1,0 đ	. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ thì: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{12}{a^2+63} + \frac{12}{b^2+63} + \frac{12}{c^2+63}.$	
	$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a+b} \frac{1}{b+c}} = 2\frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \geq \frac{4}{a+2b+c}$ Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{a+2c+b}$ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{b+2a+c}$ Suy ra $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c} \geq 2\left(\frac{1}{b+2a+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a}\right)$	0,25
	Ta chứng minh $\frac{1}{b+2a+c} \geq \frac{6}{a^2+63}$. Thật vậy: $\frac{1}{b+2a+c} \geq \frac{6}{a^2+63}$ $\Leftrightarrow a^2 + 63 \geq 6b + 12a + 6c \Leftrightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 + 36 - 6b - 12a - 6c \geq 0$ $\Leftrightarrow 2(a-3)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 \geq 0$ Điều này luôn đúng. Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 3$	0,25
	Vậy $\frac{1}{b+2a+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{6}{a^2+63} + \frac{6}{b^2+63} + \frac{6}{c^2+63}$ Suy ra $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{12}{a^2+63} + \frac{12}{b^2+63} + \frac{12}{c^2+63}$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.	0,25

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.