TRƯỜNG THPT BẮC SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG LỚP 12

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN 12 THPT

Thời gian: 180 phút *(Không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi gồm có 01 trang, 05 câu)

Câu 1: **(6,0 điểm).**

a. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

b. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

c. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4.

Câu 2: (4,0 điểm)

a. Giải hệ PT sau trên tập số thực: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} & (1) \\ x^2+y^2-xy=1 & (2) \end{cases}$

b. Giải phương trình sau trên tập số thực: $\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3: (2,0 điểm). Từ các số của tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

a. Lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

b. Lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

Câu 4. (6,0 điểm)

a. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$

b. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A’ lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 5: (2,0 điểm).

Một đội công nhân xây dựng phải xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3(m^3). Tỉ số giữa chiều cao của bể và chiều rộng của đáy bằng 4. Biết rằng bể nước chỉ có các mặt bên và mặt đáy (tức không có mặt trên). Tính chiều dài của đáy để người thợ xây tốn ít nguyên vật liệu nhất.

---------------- **Hết** ----------------

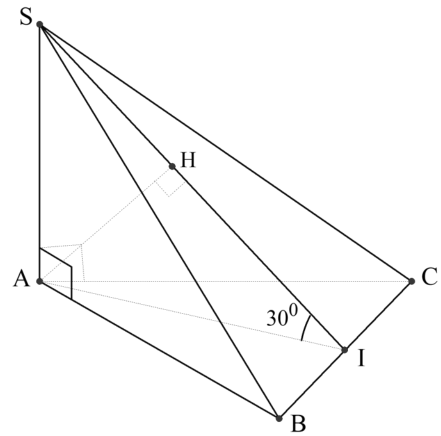
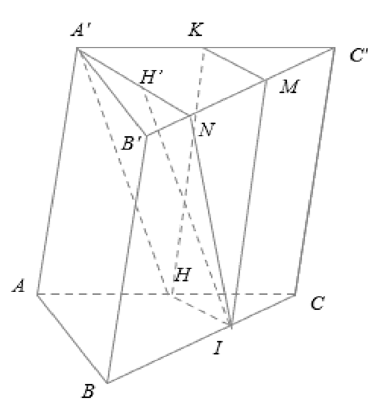
TRƯỜNG THPT BẮC SƠN	KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG LỚP 12
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	NĂM HỌC 2023-2024
	MÔN THI: TOÁN 12 THPT

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM.

(Đáp án gồm 04 trang)

Câu	Đáp án	Thang điểm
1a.	Ta có: +) TXĐ: $D=\mathbb{R}$ +) $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.	**0,5**
	Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=m^2+3(4m+9)\le 0 \end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow m\in[-9;-3]$ $\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.	**1,0**
1b.	Ta có: $y'=4x^3+12mx^2+6(m+1)x$. + TH1: $m=-1$, ta có: $y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$. Bảng xét dấu $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 3 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & - & 0 & + & \end{array}$ Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.	**1,0**
	Ta có: $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+6mx+3m+3=0\,(*) \end{array}\right.$ + TH2: $m\ne -1$ Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (3m)^2-2(3m+3)\le 0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{3}\le m\le\frac{1+\sqrt{7}}{3}$. Vậy $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.	**1,0**
1c.	$f(x)=x^2+2x+m-4$ có $f'(x)=2x+2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$. Do đó $\max\limits_{[-2;1]}\left\|x^2+2x+m-4\right\|=\max\{\|m-1\|;\|m-4\|;\|m-5\|\}$. Ta thấy $m-5<m-4<m-1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$, suy ra $\max\limits_{[-2;1]} y$ chỉ có thể là $\|m-5\|$ hoặc $\|m-1\|$.	**1,0**

	Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = \|m-5\|$ thì $\begin{cases} \|m-5\| = 4 \\ \|m-5\| \ge \|m-1\| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Nếu $\max\limits_{[-2;1]} y = \|m-1\|$ thì $\begin{cases} \|m-1\| = 4 \\ \|m-1\| \ge \|m-5\| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$. Vậy $m \in \{1; 5\}$.	**1,0**
2a.	ĐK: $\|y\| \ge 1$. (1) $\Leftrightarrow x - y = \sqrt{y^2-1} - \sqrt{x^2+1}$ $\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 1 + x^2 + 1 - 2\sqrt{(y^2-1)(x^2+1)}$ $\Leftrightarrow xy = \sqrt{(y^2-1)(x^2+1)} \Rightarrow x^2y^2 = x^2y^2 + y^2 - x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1$ Kết hợp với (2) ta được $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2x \end{array}\right.$ $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ $y = 2x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ Thử lại ta có $x = 0, y = 1$ và $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thỏa mãn hệ pt Vậy hệ có 2 nghiệm như trên	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
2b.	Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*) Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos^2 x(\tan^2 x + \tan x) = \sin x + \cos x$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$ Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ Với $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ Đối chiếu điều kiện (*), suy ra nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
3	a. Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$, $a, b, c, d \in \{0,1,2,3,4,5,6\}; a \ne 0$ Chọn d: có 3 cách; chọn a có 5 cách; chọn b, c có 5.4 cách Vậy có 300 số. b. Gọi $Y = (a;b)$, trong đó a,b là các số lẻ từ $\{1;3;5\}$, số cách chọn Y và các phần tử trong Y là $C_3^2.2!$ Giả sử số cần tìm thỏa mãn đề bài có dạng $X = \overline{Ycde}$ và các hoán vị. Khi đó có các trường hợp sau xảy ra:	**1,0** **0,5**

	TH1: Số có dạng $\overline{Ycde}$ có $C_3^2.2!.A_4^3$ cách chọn. TH2: Số có dạng $\overline{cYde}$ có $3.C_3^2.2!A_3^2$ cách chọn. TH3: Số có dạng $\overline{cdYe}$ có $3.3.C_3^2.2!2$ cách chọn. Vậy có tất cả $C_3^2.2.\left(A_4^3+3A_3^2+18\right)=360$ số	**0,5**
4a.		**0,5**
	Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp(SBC) và mp (ABC) là $\widehat{\mathrm{SIA}}=30^0$. H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $\mathrm{d}\left(\mathrm{A},(\mathrm{SBC})\right)=\mathrm{AH}=\mathrm{a}$. Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $\mathrm{AI}=\dfrac{\mathrm{AH}}{\sin 30^0}=2\mathrm{a}$. Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao suy ra $2\mathrm{a}=\mathrm{x}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \mathrm{x}=\dfrac{4\mathrm{a}}{\sqrt{3}}$. Diện tích tam giác đều ABC là $\mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}=\left(\dfrac{4\mathrm{a}}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\mathrm{a}^2\sqrt{3}}{3}$. Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $\mathrm{SA}=\mathrm{AI}.\tan 30^0=\dfrac{2\mathrm{a}}{\sqrt{3}}$. Vậy $\mathrm{V}_{\mathrm{S.ABC}}=\dfrac{1}{3}.\mathrm{S}_{\mathrm{ABC}}.\mathrm{SA}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4\mathrm{a}^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2\mathrm{a}}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\mathrm{a}^3}{9}$.	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
4b.		**0,5**
	Ta có $\mathrm{AC}=\mathrm{a}\sqrt{3}$. Từ H kẻ HI vuông góc với BC.	**0,5**

	Ta có $\Delta HIC \sim \Delta BAC$ nên $\frac{HI}{AB}=\frac{HC}{BC} \Rightarrow HI=\frac{AB.HC}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi K là trung điểm của A'C'. từ K kẻ KM vuông góc với B'C'. Tứ giác KMIH là hình bình hành nên $KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi N là điểm trên B'C' sao cho M là trung điểm của C'N $\Rightarrow A'N = 2KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC)$. Mà $A'N > HI$ nên $\widehat{HIN}$ là góc tù. Suy ra $\widehat{HIN} = 120^0 \Rightarrow \widehat{A'NI} = 60^0$. Gọi H' là hình chiếu của I lên A'N suy ra H' là trung điểm của A'N. $\Rightarrow A'H = IH' = NH'.\tan 60^0 = \frac{3a}{4}$. $\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = \frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
5	Gọi chiều cao của bể là h(m), chiều rộng và chiều dài của đáy là y (m) và x (m). Theo đề ra ta có: $\begin{cases} h = 4y \\ xyh = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4.\frac{3}{xh} \Leftrightarrow h^2 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}} \\ y = \frac{1}{4}h = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ (*) + Người thợ sử dụng ít nguyên liệu nhất khi tổng diện tích các mặt bên và đáy là nhỏ nhất, hay $S = 2xh + 2hy + xy$ đạt giá trị nhỏ nhất. + Từ (*), ta có: $S = 2\sqrt{12}\sqrt{x} + 2\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x} = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$ + Áp dụng BĐT AM-GM (Cô-si), ta được: $S = \frac{6}{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} + \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{x}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2 x} = 3\sqrt[3]{6\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{27}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{6}{x} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**