SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐỒNG NAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Môn: TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề thi gồm có một trang, có năm bài)

Bài 1. *(5 điểm)*

1) Chứng minh rằng phương trình $-x=\sqrt[3]{x^2-6x+3}$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức

$$T=\left(x_1^3+x_1^2+9\right)\left(x_2^3+x_2^2+9\right)\left(x_3^3+x_3^2+9\right).$$

2) Cho hai hàm số $y=x^3+x^2-3x-1, y=2x^3+2x^2-mx+2$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$, $\left(C_2\right)$ với *m* là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của *m* để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt tại ba điểm phân biệt có tung độ là y_1, y_2, y_3 thỏa mãn

$$\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}.$$

Bài 2. (*3 điểm*) Cho *a, b, c* là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c\geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\geq abc$$

Bài 3. (*4 điểm*) Cho dãy số $\left(x_n\right)$ xác định bởi $x_1=x_2=1$ và $x_n.x_{n+2}=x_{n+1}^2+3.\left(-1\right)^{n-1}$.

1) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy $\left(x_n\right)$ đều là số nguyên.

2) Tính $\lim\dfrac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}$.

Bài 4. (*4 điểm*) Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*) có trực tâm *H, K* là trung điểm *BC* và *G* là hình chiếu vuông góc của *H* trên *AK*. Lấy *D* đối xứng *G* qua *BC* và *I* đối xứng *C* qua *D*. Tia phân giác $\widehat{ACB}$ cắt *AB* tại *F* và tia phân giác $\widehat{BID}$ cắt *BD* ở *M*, *MF* cắt *AC* tại *E*.

1) Chứng minh rằng *D* nằm trên đường tròn (*O*).

2) Tiếp tuyến tại *A* của (*O*) cắt *BC* ở *X, XE* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *EBM* ở điểm thứ hai là *Y*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác *EYD* tiếp xúc đường tròn (*O*).

Bài 5. (*4 điểm*) Cho *m, n* là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^3+m=12n^3+n$. Chứng minh rằng $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

-------HẾT-------

Họ & tên thí sinh: ……………………………….. Số báo danh: ……………...

Chú ý. Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!