

ĐỀ CHÍNH THỨC

Khóa ngày 04 tháng 4 năm 2023

Môn thi: TOÁN

BÀI THI THỨ NHẤT

SỐ BÁO DANH:.....

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang và 04 câu

Câu 1 (2,5 điểm):

a. Giải phương trình: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$$

Câu 2 (2,5 điểm):

a. Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2+4} - 2}.$

b. Chứng minh rằng với mọi tham số thực m , phương trình $x^6 - 65 + m\sqrt[3]{2-x} = m(1 - \sqrt{x-1})$ luôn có nghiệm.

Câu 3 (1,5 điểm):

a. Cho (H) là một đa giác đều có 252 đường chéo. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H) . Tính xác suất để tam giác được chọn là một tam giác vuông không cân.

b. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau đồng thời tổng lập phương của ba chữ số đó chia hết cho 3.

Câu 4 (3,5 điểm):

Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M di động trên cạnh AB (M khác A, B). Mặt phẳng (α) luôn đi qua M đồng thời song song với cả hai đường thẳng SA và BC .a. Xác định thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α) . Tìm vị trí của điểm M để thiết diện có diện tích lớn nhất.b. Điểm N nằm trên cạnh BC thỏa mãn $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{23}{5}$. Chứng minh rằng: mặt phẳng (SMN) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động.c. Chứng minh rằng: $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$.

-----HẾT-----

YÊU CẦU CHUNG

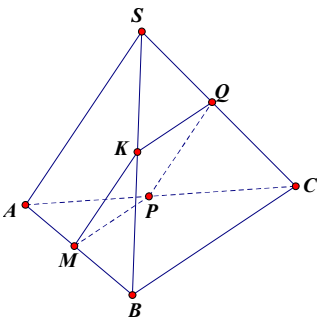
- * Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.
- * Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.
- * Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai ở phần nào thì cho điểm 0 ở phần đó.
- * Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm. Đối với những phần được chia đến 0,5 điểm thì tổ giám khảo thống nhất để chia đến 0,25 điểm.
- * Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng câu.
- * Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.

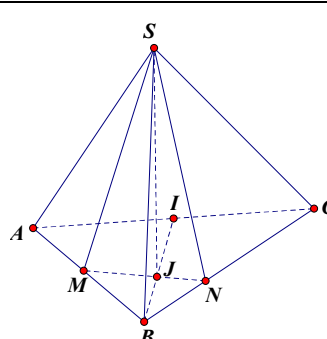
Câu	Nội dung	Điểm
1a	Giải phương trình lượng giác: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$.	1,0
	Ta có: $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$ $\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 1 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right)$	0,25
	$\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2\cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = -\cos x$ $\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos(\pi - x)$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ Vậy phương trình có hai họ nghiệm là: $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,25

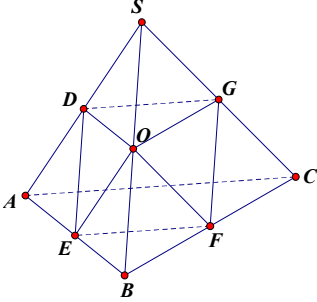
1b	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \quad (*) \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$	1,5
	Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.	0,25
	Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{xy}{(x+1)(y+1)} = \frac{1}{4} \end{cases}$.	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{y+1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$, $(*)$ trở thành: $\begin{cases} uv = \frac{1}{4} \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases}$.	0,25
	Với $\begin{cases} u+v=1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow u=v=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \text{ (TM)}$	0,25
	Với $\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow u=v=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-1 \\ 2y+x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{3} \text{ (TM)}$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $(1;1)$ và $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.	0,25
2a	Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2+4}-2}$.	1,5
	Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{4+4x} - \sqrt[3]{8+12x}}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sqrt{3x^2+4}-2}{x^2}}$.	0,25

	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$	0,25
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4 - 4}{x^2 (\sqrt{3x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{(\sqrt{3x^2 + 4} + 2)} = \frac{3}{4}.$	0,25
	Ta có: $\sqrt{4 + 4x} - \sqrt[3]{8 + 12x} = (\sqrt{4 + 4x} - (x + 2)) + ((x + 2) - \sqrt[3]{8 + 12x})$ $= \frac{-x^2}{\sqrt{4 + 4x} + x + 2} + \frac{x^3 + 6x^2}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{8 + 12x} + \sqrt[3]{(8 + 12x)^2}}$	0,25
	Do đó: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 4x} - \sqrt[3]{8 + 12x}}{x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{4 + 4x} + x + 2} + \frac{x + 6}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt[3]{8 + 12x} + \sqrt[3]{(8 + 12x)^2}} \right)$	0,25
	$= \frac{-1}{4} + \frac{6}{12} = \frac{1}{4}.$ Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 4x} - \sqrt[3]{8 + 12x} + 1 - \cos x}{\sqrt{3x^2 + 4} - 2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 1.$	0,25
2b	Chứng minh rằng với mọi tham số thực m, phương trình $x^6 - 65 + m \cdot \sqrt[3]{2 - x} = m(1 - \sqrt{x - 1})$ luôn có nghiệm.	1,0
	Điều kiện: $x \geq 1$. Ta có: $x^6 - 65 + m \sqrt[3]{2 - x} = m(1 - \sqrt{x - 1}) \Leftrightarrow x^6 - 65 + m(\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} - 1) = 0.$	0,25
	Xét hàm số $f(x) = x^6 - 65 + m(\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} - 1)$ liên tục trên nửa khoảng $[1; +\infty)$ nên nó liên tục trên đoạn $[2; 10]$.	0,25
	Lại có: $f(2) = -1 < 0$, $f(10) = 10^6 - 65 > 0$.	0,25
	Suy ra: $f(2) \cdot f(10) < 0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(2; 10)$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi tham số thực m.	0,25
3a	Cho (H) là một đa giác đều có 252 đường chéo. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Tính xác suất để tam giác được chọn là	1,0

	một tam giác vuông không cân.	
	Gọi n là số đỉnh của (H) ($n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 3$). Số đường chéo của (H) là: $C_n^2 - n$. Do đó: $C_n^2 - n = 252 \Leftrightarrow \frac{n!}{2 \cdot (n-2)!} - n = 252 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 252$ $\Leftrightarrow n^2 - 3n - 504 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 24(TM) \\ n = -21(KTM) \end{cases}$. Số đỉnh của (H) là: $n = 24$.	0,25
	Gọi biến cố A là: “tam giác được chọn là một tam giác vuông không cân”. Không gian mẫu là: $n_\Omega = C_{24}^3 = 2024$.	0,25
	Gọi đường tròn tâm O là đường tròn ngoại tiếp (H). Ta thấy số đường chéo của (H) đi qua O là: 12. Hai đỉnh nằm trên mỗi đường chéo của (H) đi qua O kết hợp với mỗi đỉnh trong 22 đỉnh không nằm trên đường chéo đó tạo thành 22 tam giác vuông, trong đó có hai tam giác vuông cân. Do đó: ứng với mỗi đường chéo của (H) có 20 tam giác vuông không cân.	0,25
	Số phần tử thuận lợi của biến cố A là: $n_A = 12 \cdot 20 = 240$. Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{30}{253}$.	0,25
3b	Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau đồng thời tổng lập phương của ba chữ số đó chia hết cho 3.	0,5
	Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ (với $a \neq 0, a \neq b \neq c, (a^3 + b^3 + c^3) : 3$) Vì $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$ nên $(a^3 + b^3 + c^3) : 3$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^3 : 3 \Leftrightarrow (a+b+c) : 3$ Đặt $A = \{3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{2; 5; 8\}$ TH1: Mỗi chữ số a, b, c thuộc một tập khác nhau trong ba tập A, B, C. Số cách chọn là: $3! \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ (cách) TH2: Cả ba chữ số a, b, c thuộc cùng một tập A (hoặc B hoặc C). Số cách chọn là: $3! \cdot 3 = 18$ (cách)	0,25
	TH3: Tập $\{a; b; c\}$ chứa chữ số 0 và hai phần tử còn lại thuộc A. Số cách chọn là: $2 \cdot A_3^2 = 12$ (cách) TH4: Tập $\{a; b; c\}$ chứa chữ số 0, một phần tử thuộc B và một phần tử thuộc C. Số cách chọn là: $2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = 36$ (cách)	0,25

	Vậy có $162 + 18 + 12 + 36 = 228$ số thỏa mãn bài toán.	
4	Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M di động trên cạnh AB (M khác A, B). Mặt phẳng (α) luôn đi qua M đồng thời song song với cả hai đường thẳng SA và BC. a. Xác định thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α). Tìm vị trí của điểm M để thiết diện có diện tích lớn nhất. b. Điểm N nằm trên cạnh BC thỏa mãn $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{23}{5}$. Chứng minh rằng: mặt phẳng (SMN) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động. c. Chứng minh rằng: $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$.	3,5
4a	Xác định thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi $mp(\alpha)$. Tìm vị trí của điểm M để thiết diện có diện tích lớn nhất.	2,0
		
	Trong $mp(SAB)$, kẻ $MK \parallel SA$ ($K \in SB$). Trong $mp(ABC)$, kẻ $MP \parallel BC$ ($P \in AC$). Trong $mp(SAC)$, kẻ $PQ \parallel SA$ ($Q \in SC$).	0,5
	Thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi $mp(\alpha)$ là tứ giác $MPQK$.	0,25
	Ta có: $MP \parallel QK$ (vì cùng song song với BC) và $MK \parallel PQ$ (vì cùng song song với SA). Do đó, tứ giác $MPQK$ là hình bình hành.	0,25
	Đặt $\frac{AM}{AB} = x$ ($0 < x < 1$). Xét tam giác ABC có $MP \parallel BC$ nên ta có: $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = x \Rightarrow MP = x.BC$. Xét tam giác SAB có $MK \parallel SA$ nên ta có: $\frac{MK}{SA} = \frac{BM}{AB} = \frac{AB - AM}{AB} = 1 - x \Rightarrow MK = (1 - x).SA.$	0,25
	Diện tích thiết diện $MPQK$ là: $S_{MPQK} = MP.MK.\sin(MP; MK) = x(1 - x).SA.BC.\sin(SA, BC).$	0,5

	Ta thấy: $SA \cdot BC \cdot \sin(SA; BC)$ không đổi.	
	Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $x(1-x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy diện tích $MPQK$ lớn nhất khi $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ hay M là trung điểm của AB.	0,25
4b	Điểm N nằm trên cạnh BC thỏa mãn $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{23}{5}$. Chứng minh rằng: $mp(SMN)$ luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động.	0,75
		
	Gọi I là trung điểm của AC, J là giao điểm của hai đoạn thẳng MN và BI. Ta có: $\frac{S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle BAI}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI} \Rightarrow \frac{2S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI}$ (1) $\frac{S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle BCI}} = \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI} \Rightarrow \frac{2S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI}$ (2) Từ (1), (2) suy ra: $\frac{2S_{\triangle BMJ}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{2S_{\triangle BNJ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BJ}{BI} + \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BJ}{BI} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BA} + \frac{BN}{BC} \right) \frac{BJ}{BI}$ (3)	0,25
	Mặt khác: $\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC}$ (4) Từ (3), (4) suy ra: $\frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BA} + \frac{BN}{BC} \right) \frac{BJ}{BI} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \Leftrightarrow \frac{BI}{BJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} \right) \Leftrightarrow \frac{BI}{BJ} = \frac{23}{10}$.	0,25
	Vì J thuộc đoạn thẳng BI và thỏa mãn $\frac{BI}{BJ} = \frac{23}{10}$ nên J là điểm cố định khi M di động. Vậy $mp(SMN)$ luôn chứa đường thẳng SJ cố định khi M di động (đpcm)	0,25

4c	Chứng minh rằng: $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$.	0,75
		
	Gọi D, E, F, G, O lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, AB, BC, SC, SB. Ta thấy: tứ giác $DEFG$ là hình bình hành và O không thuộc $mp(DEFG)$ (5) Ta có: $(SA + BC)^2 = (2OE + 2OG)^2$ và $(SC + AB)^2 = (2OF + 2OD)^2$ (6) Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $OE + OG > EG$ và $OF + OD > DF$ (theo (5)) (7)	0,25
	Mặt khác: $EG^2 + DF^2 = \overrightarrow{EG}^2 + \overrightarrow{DF}^2 = (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF})^2 + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG})^2$ $= 2DE^2 + 2EF^2 + 2\overrightarrow{DE}(\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{EF}) = \frac{1}{2}(SB^2 + AC^2) \quad (8)$	0,25
	Từ (6), (7), (8) suy ra: $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > 4(EG^2 + DF^2) = 2(SB^2 + AC^2) \geq (SB + AC)^2.$ Vậy $(SA + BC)^2 + (SC + AB)^2 > (SB + AC)^2$ (đpcm)	0,25

----- HẾT -----

Câu 1 (2,5 điểm):

a. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq 2\sqrt{a+b+c+1}.$$

b. Cho tập hợp $A = \{1; 3; 5; \dots; 2n-1\}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại 12 tập con $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $B_k \cap B_j = \emptyset$ (với $k = \overline{1; 12}, j = \overline{1; 12}, k \neq j$);

ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{12} = A$;

iii) Tổng các phần tử trong mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng nhau.

Câu 2 (2,5 điểm):

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2023 \\ 7u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

a. Chứng minh rằng: $\lim u_n = +\infty$.

b. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4}$. Tìm giới hạn của dãy số (v_n) .

Câu 3 (1,5 điểm):

a. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^5 + n + 1$ chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất.

b. Cho a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a^{2022} = b^{2023}$. Tìm a khi b là số nhỏ nhất.

Câu 4 (3,5 điểm):

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . AD, BE, CF là ba đường cao ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của BC , N là hình chiếu vuông góc của H trên AM . AD cắt BN tại P , AM cắt CF tại Q .

a. Chứng minh rằng: ba đường thẳng BC, EF, HN đồng quy tại điểm T .

b. Chứng minh rằng: đường thẳng PQ song song với đường thẳng BC .

c. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại K , L là điểm đối xứng của K qua T .

Chứng minh rằng: $MONL$ là tứ giác nội tiếp.

-----HẾT-----

YÊU CẦU CHUNG

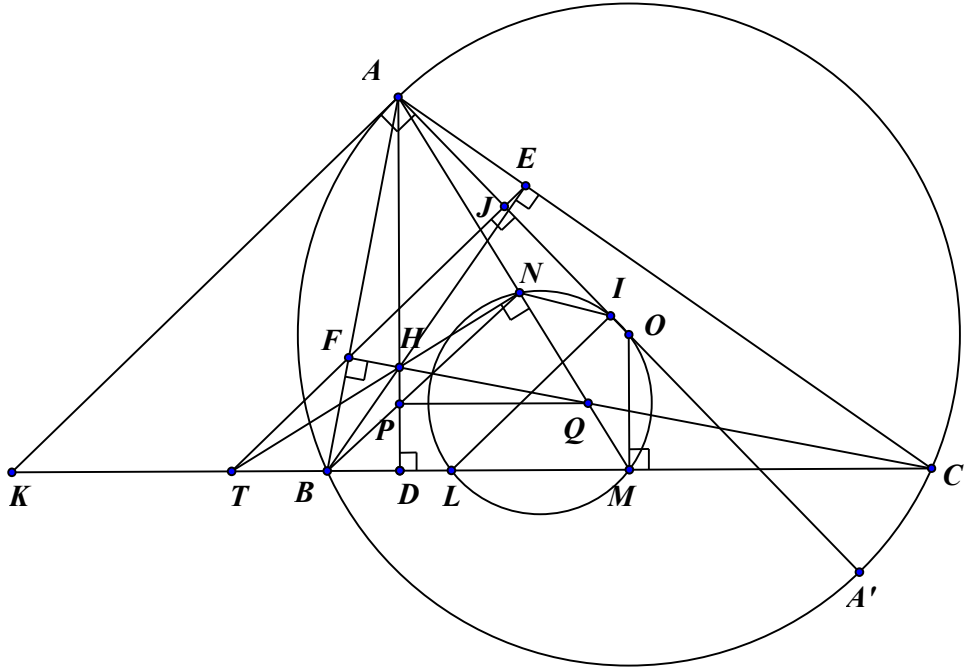
- * Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.
- * Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.
- * Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.
- * Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm. Đối với những phần được chia đến 0,5 điểm thì tổ giám khảo thống nhất để chia đến 0,25 điểm.
- * Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng câu.
- * Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq 2\sqrt{a+b+c+1}.$	1,5
	Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 = \frac{ab+bc+ca}{abc} + 1$ $= ab+bc+ca+1 = (ab+bc) + (ca+1) \quad (1)$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $(ab+bc)$ và $(ca+1)$ ta có: $(ab+bc) + (ca+1) \geq 2\sqrt{(ab+bc)(ca+1)}$ $= 2\sqrt{a^2bc + abc^2 + ab+bc}$ $= 2\sqrt{a+c+ab+bc} = 2\sqrt{a+c+b(a+c)} \quad (2)$	0,25
	Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có: $a^3 \geq abc \geq c^3 \Rightarrow a^3 \geq 1 \geq c^3 \Rightarrow a \geq 1 \geq c$ $\Rightarrow (a-1)(c-1) \leq 0 \Leftrightarrow a+c \geq ac+1$ $\Rightarrow b(a+c) \geq abc+b \Rightarrow b(a+c) \geq b+1 \quad (3)$	0,5
	Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq 2\sqrt{a+b+c+1}.$	0,25

	Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} ab + bc = ac + 1 \\ a = c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 1.$	
1b	Cho tập hợp $A = \{1; 3; 5; \dots; 2n-1\}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại 12 tập con $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: i) $B_k \cap B_j = \emptyset$ (với $k = \overline{1; 12}, j = \overline{1; 12}, k \neq j$); ii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{12} = A$; iii) Tổng các phần tử trong mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng nhau.	1,0
	Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn bài toán. Tổng tất cả các phần tử của tập A là: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.	0,25
	Vì tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) bằng nhau nên tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) là: $\frac{n^2}{12}$. Do đó: $\frac{n^2}{12} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 6m, m \in \mathbb{N}^*.$	0,25
	Khi đó tổng các phần tử của mỗi tập B_k (với $k = \overline{1; 12}$) là: $3m^2$. Với $n = 6m \Rightarrow 2n-1 = 12m-1$ thuộc một tập B_k nào đó $\Rightarrow 12m-1 \leq 3m^2$ $\Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow n \geq 24$.	0,25
	Khi $n = 24 \Rightarrow A = \{1; 3; 5; \dots; 47\}$. Lúc đó: $B_1 = \{1; 47\}, B_2 = \{3; 45\}, B_3 = \{5; 43\}, \dots, B_{12} = \{23; 25\}$ là 12 tập con của A thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy số nguyên dương n nhỏ nhất cần tìm là: $n = 24$.	0,25
2	Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2023 \\ 7u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 9, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ a. Chứng minh rằng: $\lim u_n = +\infty$. b. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4}$. Tìm giới hạn của dãy số (v_n).	2,5
2a	Chứng minh rằng: $\lim u_n = +\infty$.	1,25
	Chứng minh bằng quy nạp: $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) Thật vậy, Với $n = 1$ ta có: $u_1 = 2023 > 3$ nên (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ hay $u_k > 3$, với $n = k \geq 1$.	0,25

	Ta có: $u_{k+1} - 3 = \frac{(u_k - 3)(u_k + 4)}{7} > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 3$ nên (1) đúng với $n = k + 1$. Do đó: $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	Mặt khác: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{7} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	Nên (u_n) là dãy số tăng. Giả sử $\lim u_n = L$ (với $L > u_1 = 2023$).	0,25
	Lúc đó: $\lim(7u_{n+1}) = \lim(u_n^2 + u_n + 9) \Leftrightarrow (L - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 3 < u_1$ (vô lý). Vậy $\lim u_n = +\infty$ (đpcm)	0,25
2b	Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4}$. Tìm giới hạn của dãy số (v_n).	1,25
	Ta có: $u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(u_n + 4)}{7}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{7}{(u_n - 3)(u_n + 4)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (Vì $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$) $\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_n + 4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Do đó: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 4} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - 3} - \frac{1}{u_{k+1} - 3} \right)$	0,25
	$= \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{u_{n+1} - 3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Vì $\lim u_n = +\infty$ nên $\lim v_n = \lim \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{u_{n+1} - 3} \right) = \frac{1}{2020}$. Vậy $\lim v_n = \frac{1}{2020}$.	0,25
3a	Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^5 + n + 1$ chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất.	1,0
	Đặt $n^5 + n + 1 = p^r$ (với $r \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố). Ta có: $n^5 + n + 1 = n^3(n^2 + n + 1) - n^2(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$.	0,25

	Do đó: $(n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1) = p^r$.	
	TH1: $n^2 + n + 1 = 1$ và $n^3 - n^2 + 1 = p^r$. Suy ra: $n = 0 \Rightarrow n^5 + n + 1 = 1$ (KTM). TH2: $n^2 + n + 1 = p^r$ và $n^3 - n^2 + 1 = 1$. Suy ra: $n = 1 \Rightarrow n^5 + n + 1 = 3$ (TM).	0,25
	TH3: $n^2 + n + 1 = p^m$ và $n^3 - n^2 + 1 = p^k$ (với $m, k \in \mathbb{N}^*; m + k = r$). + Với $n = 2 \Rightarrow n^5 + n + 1 = 35$ (KTM). + Với $n \geq 3 \Rightarrow n^2 - n > n + 1 \Rightarrow n(n^2 - n) > n(n + 1) \Rightarrow n^3 - n^2 + 1 > n^2 + n + 1$. Do đó: $k > m$.	0,25
	Mà $p^k = n^3 - n^2 + 1 = n(n^2 + n + 1) - 2(n^2 + n + 1) + n + 3 = n.p^m - 2.p^m + n + 3$ nên $p^m.p^{k-m} = p^m(n - 2) + n + 3$. Do đó: $n + 3$ chia hết cho p^m nên $n + 3 \geq n^2 + n + 1 \Leftrightarrow n^2 \leq 2$ (vô lý vì $n \geq 3$). Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm.	0,25
3b	Cho a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a^{2022} = b^{2023}$. Tìm a khi b là số nhỏ nhất.	0,5
	Bổ đề: Nếu x, n là hai số nguyên dương và y là số hữu tỉ thỏa mãn $y^n = x$ thì y là số nguyên. Thật vậy, gọi $y = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a, b) = 1$). Vì $(a, b) = 1 \Rightarrow (a^n, b^n) = 1$. Từ $y^n = x \Rightarrow a^n = x.b^n$ nên b^n là ước của a^n mà $(a^n, b^n) = 1 \Rightarrow b^n = 1 \Rightarrow b = 1$ hay $y = a \in \mathbb{Z}$.	0,25
	Trở lại bài toán: $a^{2022} = b^{2023} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2022} = b$. Áp dụng bổ đề ta có: $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{a}{b} = k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = k.b, k \in \mathbb{N}^*$. Từ đó ta có: $b = k^{2022}$. Vì b là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 nên k là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 hay $k = 2 \Rightarrow b = 2^{2022}$. Vậy $a = 2^{2023}$.	0,25
4	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H . AD, BE, CF là ba đường cao ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của BC , N là hình chiếu vuông góc của H trên AM . AD cắt BN tại P , AM cắt CF tại Q .	3,5

	a. Chứng minh rằng: ba đường thẳng BC, EF, HN đồng quy tại điểm T. b. Chứng minh rằng: đường thẳng PQ song song với đường thẳng BC. c. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại K, L là điểm đối xứng của K qua T. Chứng minh rằng: $MONL$ là tứ giác nội tiếp.	
4a	Chứng minh rằng: ba đường thẳng BC, EF, HN đồng quy tại điểm T .	1,5
	Ta quy ước: (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ; (XY) là đường tròn đường kính XY. Giả sử các giả thiết của bài toán có hình biểu diễn như hình vẽ. 	
	Ta có: A, E, F, H, N cùng thuộc đường tròn (AH); D, M, E, F cùng thuộc đường tròn Euler (DEF) của tam giác ABC; D, M, N, H cùng thuộc đường tròn (HM).	0,5
	Suy ra: DM là trục đẳng phương của hai đường tròn (DEF) và (HM). Hay BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (DEF) và (HM). EF là trục đẳng phương của hai đường tròn (DEF) và (AH). HN là trục đẳng phương của hai đường tròn (AH) và (HM).	0,5
	Vì $AB < AC$ nên BC luôn cắt EF tại điểm T. Do đó: T là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(DEF), (AH), (HM)$. Suy ra: ba trục đẳng phương BC, EF, HN của ba đường tròn $(DEF), (AH), (HM)$ đồng quy tại tâm đẳng phương T (đpcm)	0,5
4b	Chứng minh rằng: đường thẳng PQ song song với đường thẳng BC .	1,0

	$BDHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AD}$ (1) $DHNM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \overline{AN}.\overline{AM} = \overline{AH}.\overline{AD}$ (2)	0,25
	Từ (1), (2) suy ra : $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AN}.\overline{AM} \Rightarrow BFNM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PNQ} = \widehat{BFM}$ (3)	0,25
	Mà $\widehat{BFM} = \widehat{DBF}$ (vì tam giác MBF cân tại M) và $\widehat{DBF} = \widehat{PHQ}$ (vì $BDHF$ nội tiếp) (4) Từ (3), (4) suy ra: $\widehat{PNQ} = \widehat{PHQ} \Rightarrow PQNH$ là tứ giác nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow \widehat{HPQ} = \widehat{HNQ} = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp AD$ (5) Kết hợp (5) với giả thiết $AD \perp BC$ ta có: $BC \parallel PQ$ (đpcm)	0,25
4c	Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại K, L là điểm đối xứng của K qua T. Chứng minh rằng: $MONL$ là tứ giác nội tiếp.	1,0
	Gọi J, A' lần lượt là giao điểm của AO với EF và (O) ; I là điểm đối xứng của A qua J .	0,25
	Dễ thấy $AO \perp EF$ và $\widehat{ACA'} = 90^\circ \Rightarrow CEJA'$ nội tiếp (7)	0,25
	Từ (7) và $BFNM$, $BCEF$ nội tiếp suy ra: $\overline{AI}.\overline{AO} = 2\overline{AJ}.\frac{1}{2}\overline{AA'} = \overline{AJ}.\overline{AA'} = \overline{AE}.\overline{AC} = \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AN}.\overline{AM}$ $\Rightarrow M, N, I, O$ cùng thuộc một đường tròn (8)	0,25
	Mặt khác: $AK \perp AO \Rightarrow AK \parallel JT$. Mà J, T là trung điểm của AI và KL nên IL đối xứng với AK qua JT . Do đó: $IL \parallel AK \Rightarrow \widehat{MLI} = \widehat{MKA} = \widehat{OAD} = 90^\circ - \widehat{DAK} = \widehat{MOA'}$ (vì $AD \parallel OM$) $\Rightarrow M, O, I, L$ cùng nằm trên một đường tròn (9) Từ (8), (9) suy ra: $MONL$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)	0,25

----- HẾT -----