

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**  
(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

**Câu 1 (2 điểm):** Cho hàm số  $y = x^2 - 4x + 3$  có đồ thị là  $(P)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $d_m: y = x + m$  cắt đồ thị  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$ .

**Câu 2 (4 điểm):**

a. Giải bất phương trình:  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq 0$ .

b. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$$

**Câu 3 (4 điểm):** Cho phương trình:  $\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} = \sqrt{20+x-x^2} + m$ , (1), (với  $m$  là tham số).

a. Giải phương trình (1) khi  $m = 3$ .

b. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có nghiệm.

**Câu 4 (4 điểm):**

a. Cho  $\cot \alpha = 3$ , tính giá trị biểu thức:  $P = \frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\cos^3 \alpha + 4\sin^3 \alpha}$ .

b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng AB là  $x - 2y + 1 = 0$ . Biết phương trình đường thẳng BD là  $x - 7y + 14 = 0$  và đường thẳng AC đi qua điểm  $M(2;1)$ . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

**Câu 5 (2 điểm):** Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm E thỏa mãn  $\overrightarrow{BE} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ . Gọi I là giao điểm của AC và GE, tính tỉ số  $\frac{IA}{IC}$ .

**Câu 6 (2 điểm):** Cho tam giác ABC có chu vi bằng 20, góc  $BAC = 60^\circ$ , bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng  $\sqrt{3}$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, CA, AB và M là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn  $ABM = BCM = CAM = \varphi$ . Tính  $\cot \varphi$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_1B_1C_1$ .

**Câu 7 (2 điểm):** Cho  $x, y, z \in [2019; 2020]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x, y, z) = \frac{|2019.2020 - xy|}{(x+y)z} + \frac{|2019.2020 - yz|}{(y+z)x} + \frac{|2019.2020 - zx|}{(z+x)y}.$$

-----HẾT-----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT (đối với môn Toán).*

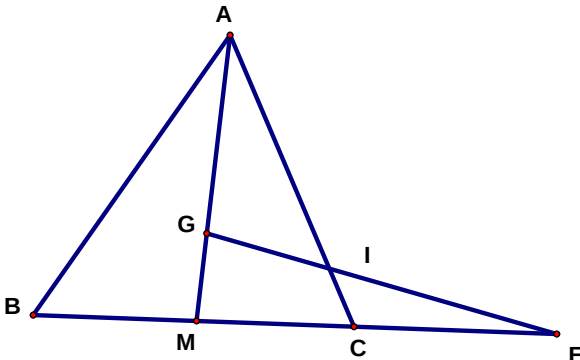
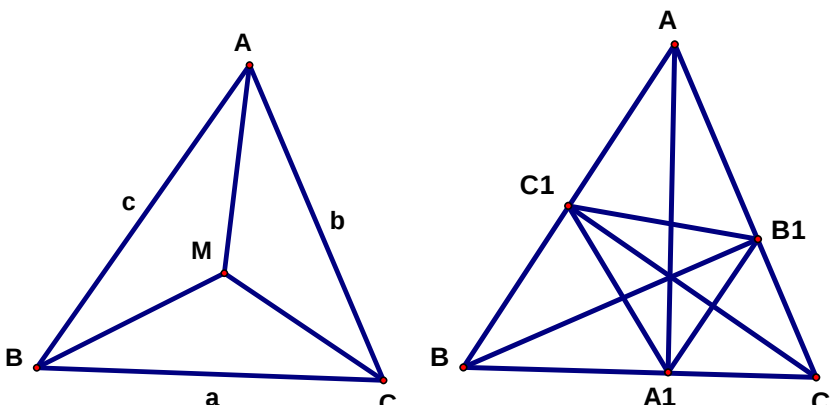
*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

**ĐÁP ÁN THI CHỌN HSG VĂN HÓA LỚP 10, 11 – MÔN TOÁN**

| Câu     | Lời giải                                                                                                                                                                                                                                                                             | Điểm         |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1) 2đ   | Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d <sub>m</sub> : $x + m = x^2 - 4x + 3$<br>$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - m = 0 (*)$<br>d <sub>m</sub> cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$                                                    | 0,5đ         |
|         | $\Leftrightarrow 25 - 12 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-13}{4}$ . Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 3 - m \end{cases}$ .                                                                                                                                         | 0,5đ         |
|         | Mà $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 \Leftrightarrow 5 = 6 - 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn                                                                                                                                      | 0,5đ<br>0,5đ |
| 2.a) 2đ | Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq 0. (**)$<br>Điều kiện: $2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq \frac{1}{2}$                                                                                                                           |              |
|         | + $x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$ nghiệm đúng.                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5đ         |
|         | + $x > 1 \vee x < \frac{1}{2} : (***) \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq 0$ , thỏa mãn                                                                                                                                                             | 0,5đ<br>0,5đ |
|         | Vậy (**) có nghiệm là: $x \geq 3 \vee x \leq 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$                                                                                                                                                                                                      | 0,5đ         |
| 2.b) 2đ | Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3 y - xy^2 + xy - y = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x^2 - y) + xy + x^2 - y = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$ . Đặt $\begin{cases} x^2 - y = a \\ xy = b \end{cases}$ ta có hệ pt: |              |
|         | $\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a^2 \\ a(1 - a^2) + a + 1 - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a^2 \\ a^3 + a^2 - 2a = 0 \end{cases}$                                                          | 0,5đ         |
|         | $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a^2 \\ a^3 + a^2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$                                                 | 0,5đ         |
|         | + $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$                                                                 |              |
|         | + $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$                                                                                                               | 0,5đ         |
|         | + $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$                                                                                                                    |              |
|         | Vậy nghiệm của hệ là: $(1; 1); (0; -1); (-1; 3); (1; 0); (-1; 0)$                                                                                                                                                                                                                    | 0,5đ         |
| 3a) 2đ  | Khi $m = 3$ ta có pt: $\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} = \sqrt{20+x-x^2} + 3$ ; đk: $x \in [-4; 5]$<br>Đặt $\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} = t \Rightarrow \sqrt{20+x-x^2} = \frac{t^2 - 9}{2}$                                                                                                     | 0,5đ         |
|         | Pttt: $t = \frac{t^2 - 9}{2} + 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 3 \end{cases}$                                                                                                                                                      | 0,5đ         |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                |                              |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|        | $+ t = 3 \Rightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} = 3 \Rightarrow \sqrt{20+x-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 5 \end{cases}$                                                                                                                        | 0,5đ<br>0,5đ                 |
| 3b) 2đ | Đặt $\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} = t \Rightarrow \sqrt{20+x-x^2} = \frac{t^2-9}{2}; t \in [3; 3\sqrt{2}]$                                                                                                                                                          | 0,5đ                         |
|        | Pttt: $t = \frac{t^2-9}{2} + m \Leftrightarrow t^2 - 2t = -2m + 9$                                                                                                                                                                                             | 0,5đ                         |
|        | Xét $f(t) = t^2 - 2t; t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \min f(t) = f(3) = 3; \max f(t) = f(3\sqrt{2}) = 18 - 6\sqrt{2}$                                                                                                                                        | 0,5đ                         |
|        | Vậy pt có nghiệm khi: $3 \leq -2m + 9 \leq 18 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \geq m \geq \frac{-9}{2} + 3\sqrt{2}$                                                                                                                                              | 0,5đ                         |
| 4a) 2đ | $P = \frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha} = \frac{2(1 + \cot^2 x) - 3\cot x(1 + \cot^2 x)}{\cot^3 x + 4} = \frac{-70}{31}$                                                                                                           | 0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ |
| 4b) 2đ | Do $B = AB \cap BD$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:<br>$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right)$        | 0,5đ                         |
|        | Gọi $\vec{n}_{AC} = (a; b); (a^2 + b^2 > 0)$ là VTPT của AC,<br>ta có: $ \cos(\vec{n}_{AC}; \vec{n}_{AB})  =  \cos(\vec{n}_{BD}; \vec{n}_{AB})  \Leftrightarrow  2a - b  = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$                                                |                              |
|        | $\Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = \frac{-b}{7} \end{cases}$                                                                                                                                                    |                              |
|        | + $a = -b$ : Chọn $a = 1; b = -1 \Rightarrow AC: x - y - 1 = 0$<br>$A = AB \cap AC$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:<br>$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3; 2)$ | 0,5đ                         |
|        | $I = DB \cap AC$ nên tọa độ I là nghiệm của hệ:<br>$\begin{cases} x - 7y + 14 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$                | 0,5đ                         |
|        | Do I là trung điểm của AC và BD nên $C(4; 3); D\left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}\right)$<br>+ $a = -b/7$ (loại) vì $AC \nparallel BD$                                                                                                                           | 0,5đ                         |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                 |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <p>5) 2đ</p> |  <p>Gọi M là trung điểm BC đặt <math>\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AC}</math></p> $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(k - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GM} - \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ <p>Do G, I, N thẳng hàng nên ta có:</p> $\frac{k - \frac{1}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{6}} \Rightarrow k = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{IA}{IC} = 4$                                                                                                        | <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> |
| <p>6) 2đ</p> |  <p>Ta có: <math>S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin 60^\circ = pr = 10\sqrt{3} \Rightarrow bc = 40</math></p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow a^2 = (b+c)^2 - 3bc \Leftrightarrow a^2 = (10-a)^2 - 120 \Leftrightarrow a = 7$ $\begin{cases} b+c=13 \\ bc=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8 \\ c=5 \end{cases} \vee \begin{cases} b=5 \\ c=8 \end{cases}$ $\cot \varphi = \angle ABM = \angle BCM = \angle CAM = \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{4S_{ABM}} = \frac{BC^2 + CM^2 - BM^2}{4S_{CBM}} =$ $= \frac{CA^2 + AM^2 - CM^2}{4S_{CMA}} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S_{ABC}} = \frac{23\sqrt{3}}{20}$ <p>Ta có <math>B_1BA = C_1CA = 90^\circ - A = 30^\circ</math></p> <p><math>B_1A_1C_1 = B_1A_1A + C_1A_1A = B_1BA + C_1CA = 60^\circ</math>. Tam giác <math>CC_1B_1</math> nội tiếp đường tròn đường kính BC nên ta có:</p> $\frac{B_1C_1}{\sin C_1CA} = BC \Rightarrow \frac{B_1C_1}{\sin 30^\circ} = 7 \Rightarrow B_1C_1 = \frac{7}{2}$ | <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>             |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|       | Mà $R_1 = \frac{B_1C_1}{2\sin 60^0} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5đ                                            |
| 7) 2đ | <p>Ta c/m: <math>\forall x, y \in [2019; 2020]</math> luôn có: <math>\frac{ 2019.2020 - xy }{x + y} \leq \frac{2020 - 2019}{2}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4(2019.2020 - xy)^2 \leq (x + y)^2 (2020 - 2019)^2</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (2.2019.2020 - 2xy - (x + y)(2020 - 2019))(2.2019.2020 - 2xy + (x + y)(2020 - 2019)) \leq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow [2020(2.2019 - x - y) + x(2019 - y) + y(2019 - x)] \cdot [2019(2.2020 - x - y) + x(2020 - y) + y(2020 - x)] \leq 0</math> (đúng)</p> <p>Vậy <math>\frac{ 2019.2020 - xy }{(x + y)z} \leq \frac{2020 - 2019}{2z} \leq \frac{1}{2.2019}</math></p> <p>Dấu « = » xảy ra khi <math>x = y = z = 2019</math>.</p> <p>Áp dụng ta có :</p> $f(x, y, z) = \frac{ 2019.2020 - xy }{(x + y)z} + \frac{ 2019.2020 - yz }{(y + z)x} + \frac{ 2019.2020 - zx }{(z + x)y}$ $\leq \frac{1}{2.2019} + \frac{1}{2.2019} + \frac{1}{2.2019} = \frac{3}{4038}$ <p>Vậy <math>\max f(x, y, z) = \frac{3}{4038}</math>; khi <math>x = y = z = 2019</math></p> | <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> |