

SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH
THPT TRẦN PHÚ
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10
NĂM HỌC 2019 - 2020
MÔN: TOÁN -THPT
Thời gian: 120 phút



ĐỀ BÀI

- Câu 1: (5,0 điểm)** Cho hàm số $y = (m-2)x^2 - 2(m-1)x + m + 2$ (m là tham số).
- Biết đồ thị là một đường parabol có tung độ đỉnh bằng $3m$. Xác định giá trị của m .
 - Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- Câu 2: (4,0 điểm)** Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên AB và CD cắt nhau tại điểm M , tọa độ điểm $A(-2; -2)$, $B(0; 4)$ và $C(7; 3)$.
- Tìm tọa độ điểm E để $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = \vec{0}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $|\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC}|$ biết P là điểm di động trên trục hoành.
 - Biết diện tích hình thang $ABCD$ gấp 3 lần diện tích tam giác MBC . Tìm tọa độ đỉnh D .
- Câu 3: (5,0 điểm)** Cho phương trình $\sqrt{2x^3 + mx^2 + 2x - m} = x + 1$ (m là tham số).
- Giải phương trình với $m = -3$.
 - Tìm các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.
- Câu 4: (4,0 điểm)** Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N lần lượt trên các cạnh BC, CA sao cho $BM = a, CN = 2a$.
- Tìm giá trị của tích vô hướng $\vec{AM} \cdot \vec{BC}$ theo a .
 - Gọi P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho AM vuông góc với PN . Tính độ dài PN theo a .
- Câu 5: (2,0 điểm)** Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^2 + 5 + m|$ (m là tham số). Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; \sqrt{5}]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

-----HẾT-----

SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH
THPT TRẦN PHÚ
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10
NĂM HỌC 2019 - 2020
MÔN: TOÁN -THPT
Thời gian: 120 phút



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (5,0 điểm). Cho hàm số $y = (m-2)x^2 - 2(m-1)x + m+2$ (m là tham số).

- a) Biết đồ thị là một đường parabol có tung độ đỉnh bằng $3m$. Xác định giá trị của m .
b) Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải:

a) Để đồ thị là một đường parabol thì $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Đồ thị có tung độ đỉnh bằng $3m \Leftrightarrow \frac{2m-5}{m-2} = 3m \Leftrightarrow 2m-5 = 3m(m-2)$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{5}{3} \end{cases} (tm).$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

b) Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì $m > 2$.

Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{m-1}{m-2}\right)$

Ta được: $\frac{m-1}{m-2} \geq 2 \Leftrightarrow m-1 \geq 2(m-2) \text{ (do } m-2 > 0 \text{)}.$

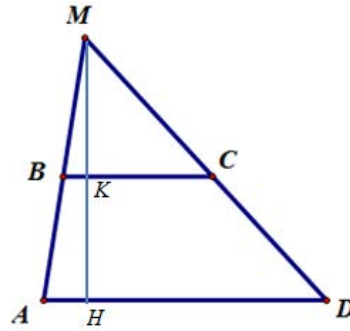
$$\Leftrightarrow m-1 \geq 2m-4 \Leftrightarrow m \leq 3$$

Vậy $2 < m \leq 3$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AB và CD cắt nhau tại điểm M, tọa độ điểm A(-2;-2), B(0;4) và C(7;3).

- a) Tìm tọa độ điểm E để $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}|$ biết P là điểm di động trên trục hoành.
b) Biết diện tích hình thang ABCD gấp 3 lần diện tích tam giác MBC. Tìm tọa độ đỉnh D.

Lời giải



a) Ta gọi $E(x; y)$,

$$\overrightarrow{EA} = (-2 - x; -2 - y), \overrightarrow{EB} = (-x; 4 - y), \overrightarrow{EC} = (7 - x; 3 - y)$$

$$\text{nên } \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x - x + 2(7 - x) = 0 \\ -2 - y + 4 - y + 2(3 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $E(2; 3)$.

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}| = |4\overrightarrow{PE}| = 4PE.$$

Nên $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi P là hình chiếu của E lên trục hoành.

Vậy $P(2; 0)$.

b) Gọi $M(a; b)$ và $D(c; d)$

Diện tích hình thang $ABCD$ gấp 3 lần diện tích tam giác MBC nên

$$4S_{\triangle MBC} = S_{\triangle MAB}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} MH \cdot BC = \frac{1}{2} MK \cdot DA$$

$$\Leftrightarrow 4MH \cdot BC = MK \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow \frac{4BC}{AD} = \frac{MK}{MH}.$$

$$\text{Mà } ABCD \text{ là hình thang nên } \frac{MK}{MH} = \frac{AD}{BC}.$$

$$\text{Do đó } \frac{AD}{BC} = \frac{4BC}{AD}.$$

$$\text{Suy ra } AD^2 = 4BC \Rightarrow AD = 2BC \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}.$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (c + 2; d + 2) \\ \overrightarrow{BC} = (7; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 12 \\ d = -4 \end{cases}.$$

Vậy $D(12; -4)$.

Câu 3: (5,0 điểm) Cho phương trình $\sqrt{2x^3 + mx^2 + 2x - m} = x + 1$ (m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = -3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Ta có phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^3 + mx^2 + 2x - m = (x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^3 + (m-1)x^2 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)[2x^2 + (m+1)x + m+1] = 0 \end{cases} (*)$

a) Với $m = -3$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(2x^2 - 2x - 2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ 1; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

b) Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + (m+1)x + m+1 = 0 (**) \end{cases} \end{cases}$

Xét phương trình $(**): 2x^2 + (m+1)x + m+1 = 0$

Có $\Delta = (m+1)^2 - 8(m+1) = (m+1)(m-7)$.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và $-1 \leq x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)(m-7) > 0 \\ 2.1^2 + (m+1).1 + m+1 \neq 0 \\ (x_1+1) + (x_2+1) > 0 \\ (x_1+1).(x_2+1) \geq 0 \end{cases} \text{ (với } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{2} \end{cases})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-7) > 0 \\ 2m+4 \neq 0 \\ -\frac{m+1}{2} + 2 > 0 \\ \frac{m+1}{2} - \frac{m+1}{2} + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty) \\ m \neq -2 \\ m < 3 \\ 2 \geq 0 (ld) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1).$

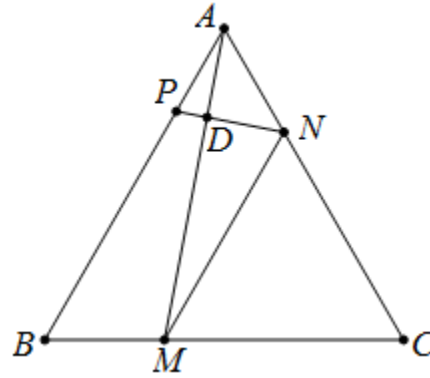
Vậy $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$.

Câu 4: Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N lần lượt trên các cạnh BC, CA sao cho $BM = a, CN = 2a$.

a. Tìm giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo a .

b. Gọi P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho AM vuông góc với PN . Tính độ dài PN theo a .

Lời giải



a. Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= 3a \cdot 3a \cdot \cos 120^\circ + a \cdot 3a \cdot \cos 0^\circ = -\frac{9}{2}a^2 + 3a^2 = -\frac{3}{2}a^2.$$

b. Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP} = 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - 3a \cdot x + \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot x \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2a^2 - \frac{5}{2}ax = a \left(2a - \frac{5}{2}x\right).$$

Theo đề, vì $AM \perp PN$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow a \left(2a - \frac{5}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}a.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^2 + 5 + m|$ (m là tham số). Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; \sqrt{5}]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^2 + 5 + m$ trên đoạn $[-2; \sqrt{5}]$.

Ta có $g(x) = (x^2 - 2)^2 + m + 1.$

Do $-2 \leq x \leq \sqrt{5} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x^2 - 2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (x^2 - 2)^2 \leq 9$

Suy ra $m + 1 \leq (x^2 - 2)^2 + m + 1 \leq 10 + m$ hay $m + 1 \leq g(x) \leq m + 10, \forall x \in [-2; \sqrt{5}]$

Suy ra $g(x) \in [m + 1; m + 10], \forall x \in [-2; \sqrt{5}].$

☑ Trường hợp 1: $0 \leq m + 1 \Leftrightarrow m \geq -1$, suy ra $\max_{[-2; \sqrt{5}]} f(x) = m + 10.$

☑ Trường hợp 2: $m + 1 < 0 \leq m + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -10 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq m < -1,$

suy ra $\max_{[-2; \sqrt{5}]} f(x) = \max\{m + 10; -m - 1\}.$

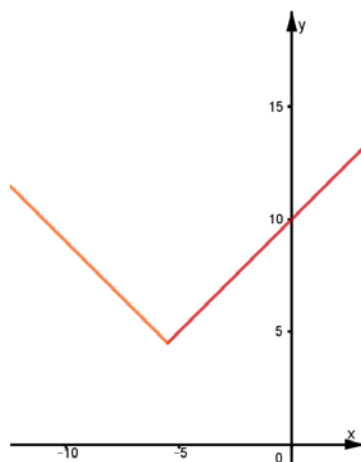
• Nếu $m + 10 > -m - 1 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{2}$, suy ra $\max_{[-2; \sqrt{5}]} f(x) = m + 10$ khi $m \in \left(-\frac{11}{2}; -1\right).$

• Nếu $m + 10 < -m - 1 \Leftrightarrow m < -\frac{11}{2}$, suy ra $\max_{[-2; \sqrt{5}]} f(x) = -m - 1$ khi $m \in \left[-10; -\frac{11}{2}\right).$

☑ Trường hợp 3: $m+10 < 0 \Leftrightarrow m < -10$, suy ra $\max_{[-2;\sqrt{5}]} f(x) = -m-1$.

$$\text{Tóm lại } h(m) = \max_{[-2;\sqrt{5}]} f(x) = \begin{cases} -m-1, m < -\frac{11}{2} \\ m+10, m \geq -\frac{11}{2} \end{cases}.$$

Suy ra được đồ thị của hàm số $h(m)$



Vậy: Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;\sqrt{5}]$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$m = -\frac{11}{2} \text{ khi đó } \max_{[-2;\sqrt{5}]} f(x) = \frac{9}{2}.$$

-----HẾT-----