SỞ GD & ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT LÝ THÁI TỔ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2017-2018
Môn: TOÁN, Khối 10
Thời gian: 120 phút, không kể thời gian phát đề.
Ngày thi 14/04/2018

Câu 1 (4.0 điểm) Cho Parabol $(P): y = x^2 + 2mx + 3$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 1$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn $AB = 10$.

Câu 2 (6.0 điểm):

1. Giải bất phương trình sau: $\dfrac{x+2}{\sqrt{2\left(x^4 - x^2 + 1\right) - 1}} \geq \dfrac{1}{x-1}$

2. Giải phương trình sau: $2\sqrt{2x-5} + 2\sqrt{3x-5} = x^2 - 8x + 21$.

3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x^2-1)^2 + 3 = \dfrac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y - x = \sqrt{\dfrac{4x - 3x^2y - 9xy^2}{x+3y}} \end{cases}$

Câu 3 (6.0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;0)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$. Tìm điểm M trên trục hoành sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MB, MC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm) sao cho BC đi qua A.

2. Cho tam giác ABC có $BC = 2$, $\widehat{A} = 60^0$ và hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau. Tính diện tích tam giác ABC.

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Câu 4 (2.5 điểm)

Biết $\dfrac{16}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{16}{\tan^2 x} + \dfrac{1}{\cot^2 x} = 33$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\tan 5x$, $\tan\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 5 (1.5 điểm) Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^4b}{a^2+1} + \dfrac{b^4c}{b^2+1} + \dfrac{c^4a}{c^2+1} \geq \dfrac{3}{2}$

------------------------- **Hết** -------------------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:.............................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG THPT LÝ THÁI TỔ

ĐÁP ÁN
THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: Toán – Lớp 10 – THPT

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1		***4,0***
	Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình: $x^2+2mx+3=2x-1 \Leftrightarrow x^2+2(m-1)x+4=0$ (1)	1,0
	Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta = m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow m>3$ hoặc $m<-1$ (*) Với điều kiện (*), gọi hai giao điểm là $A(x_1;2x_1-1), B(x_2;2x_2-1)$, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2-2m, x_1x_2=4$.	1,0
	Ta có: $AB=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5\left[(x_2+x_1)^2-4x_2x_1\right]}=10 \Leftrightarrow 5(4m^2-8m-12)=100$	1,0
	$\Leftrightarrow m^2-2m-8=0 \Leftrightarrow m=4$ hoặc $m=-2$ (tm đk (*)) Vậy $m=4$ và $m=-2$ là giá trị cần tìm.	1,0
2.1		***2,0***
	ĐKXĐ: $x\neq 1$, Ta có: $\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1\geq\sqrt{\frac{3}{2}}-1>0$ TH1: $x>1$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\leq x^2+x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\geq 0 \\ \left(x^2-x-1\right)^2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,5
	TH2: $x<1$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}\geq x^2+x-1 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)^2\geq 0$ luôn đúng Vậy BPT có tập nghiệm $S=(-\infty;1)\cup\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	0,5
2.2		***2,0***
	ĐKXĐ: $2x-5\geq 0$ PT $\Leftrightarrow x^2-10x+21+[(x-1)-2\sqrt{2x-5}]+[(x+1)-2\sqrt{3x-5}]=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2-10x+21+\frac{x^2-10x+21}{(x-1)+2\sqrt{2x-5}}+\frac{x^2-10x+21}{(x+1)+2\sqrt{3x-5}}=0$ $\Leftrightarrow (x^2-10x+21)(1+\frac{1}{(x-1)+2\sqrt{2x-5}}+\frac{1}{(x+1)+2\sqrt{3x-5}})=0$	1,0
	$\Leftrightarrow x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=7$. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=3$ và $x=7$.	0, 5

2.3		***2,0***
	HPT $\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-2x^2+4)(x^2+2)=6x^5y\\(9y^2-6xy+x^2)(x+3y)=4x-3x^2y-9x^2y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^6+8=6x^5y\\x^3+27y^3=4x\end{cases},\ \left(3y\ge x\right)$ Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên HPT $\Leftrightarrow \begin{cases}1+\dfrac{8}{x^6}=\dfrac{6y}{x}\\1+\dfrac{27y^3}{x^3}=\dfrac{4}{x^2}\end{cases}$ Đặt $a=\dfrac{2}{x^2}>0, b=\dfrac{3y}{x}$. HPT trở thành $\begin{cases}1+a^3=2b\\1+b^3=2a\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=1\\a=b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$	1,0
	Với $a=b=1$ ta được nghiệm (x ;y)= $\left(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2}/3\right)$ Với $a=b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta được nghiệm (x ;y)= $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{\sqrt{5}-1}};\dfrac{-\sqrt{\sqrt{5}-1}}{3}\right)$ Vậy hệ có 4 nghiệm (x ;y)= $\left(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2}/3\right)$ và $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{\sqrt{5}-1}};\dfrac{-\sqrt{\sqrt{5}-1}}{3}\right)$	1,0
3.1		***2,0***
	(C) có tâm $I\left(-1;3\right)$, $R=2\sqrt{2}$ Theo (1) Gọi $M\left(a;0\right)$, để từ M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) thì $MI>R$ (luôn đúng). $MB^2=MC^2=MI^2-R^2=a^2+2a+2$. Khi đó, B và C thuộc đường tròn (C’) tâm M, bán kính MB, đường tròn (C’) có phương trình: $\left(C'\right):\left(x-a\right)^2+y^2=a^2+2a+2$	1,0
	Tọa độ B và C thỏa mãn $\begin{cases}x^2+y^2+2x-6y+2=0\\\left(x-a\right)^2+y^2=a^2+2a+2\end{cases} \Rightarrow \left(BC\right):\left(2a+2\right)x-6y+a^2+2a+4=0$ Do BC đi qua A nên $a^2+6a+8=0$. Vậy $A\left(-2;0\right)$ và $A\left(-4;0\right)$.	1,0
3.2		***2,0***
	Hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau thì: $\left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2=BC^2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{4+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}\right)+\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{4+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}\right)=4 \Leftrightarrow b^2+c^2=20$	1,0
	Mặt khác: $BC^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow 4=20-2bc\cos 60^0 \Rightarrow bc=16$	0,5
	Vậy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}.16.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$	1,0
3.3		***2,0***

	Gọi N là trung điểm CD và H là tâm hình chữ nhật AMND. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật AMND. Từ giả thiết, suy ra NJ//DI, do đó NJ vuông góc với AC, hay J thuộc (C) (vì AN là đường kính của (C)). Mà MD cũng là đường kính của (C) nên $JM \perp JD$. (1) D thuộc Δ nên $D(t;t+1) \Rightarrow \overrightarrow{JD}(t-1;t+1), \overrightarrow{JM}(-1;3)$. Theo (1) $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow D(-2;-1)$	1,0
	Gọi a là cạnh hình vuông ABCD. Dễ thấy $DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4$. Gọi $A(x;y)$. Vì $\begin{cases} AM = 2 \\ AD = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2+(y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; y=3 \\ x=\frac{6}{5}; y=\frac{7}{5} \end{array}\right.$ - Với $A(-2;3) \Rightarrow B(2;3) \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow C(2;-1) \Rightarrow J(1;0)$ (thỏa mãn) - Với $A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right) \Rightarrow I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right) \Rightarrow J(-3;2)$ (loại). Vậy tọa độ các đỉnh hình vuông là $A(-2;3), B(2;3), C(2;-1), D(-2;-1)$.	1,0
4		***2,5***
	Ta có $\frac{16}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{16}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x} = 33$. Giải được $\tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan x = 2$ Khi đó: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = -\frac{4}{3}$, $\tan 3x = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x} = \frac{2}{11}$,	1,0
	Vậy: $\tan 5x = \tan(3x+2x) = \frac{\tan 3x+\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x} = -\frac{38}{41}$ $\tan\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 5x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 5x\tan\frac{\pi}{4}} = -\frac{79}{3}$	1,5
5		***1,5***
	Với các số thực dương a, b, c, áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $\frac{a^4b}{a^2+1} = a^2b-\frac{a^2b}{a^2+1} \geq a^2b-\frac{a^2b}{2\sqrt{a^2}} = a^2b-\frac{ab}{2}$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{b^4c}{b^2+1} \geq b^2c-\frac{bc}{2}, \frac{c^4a}{c^2+1} \geq c^2a-\frac{ca}{2}$. Vậy $\frac{a^4b}{a^2+1}+\frac{b^4c}{b^2+1}+\frac{c^4a}{c^2+1} \geq (a^2b+b^2c+c^2a)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $a^2b+a^2b+b^2c \geq 3ab\sqrt[3]{abc} = 3ab$ Tương tự: $b^2c+b^2c+c^2a \geq 3bc\sqrt[3]{abc} = 3bc$; $c^2a+c^2a+a^2b \geq 3ca\sqrt[3]{abc} = 3ca$. Vậy $\frac{a^4b}{a^2+1}+\frac{b^4c}{b^2+1}+\frac{c^4a}{c^2+1} \geq (a^2b+b^2c+c^2a)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{2}$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$	0,5

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.

2. Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.

3. Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm.