SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CAO BẰNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN: TOÁN

Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)

(Đề gồm: 01 trang)

Câu 1 ***(4,0 điểm).***

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ có hai điểm cực trị.

b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=-2x^3+6x^2+1$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;1)$, B và C sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Câu 2 ***(6,0 điểm).***

a) Giải phương trình: $\tan x-\sin 2x-\cos 2x+4\cos x-\frac{2}{\cos x}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x-y-1)=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases}$.

c) Giải phương trình: $x^4-6x-1=2(x+4)\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}$.

Câu 3 ***(4,0 điểm).***

a) Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn. Tính xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số nam nhiều hơn số nữ.

b) Một hợp đồng dài hạn thực hiện trong thời gian 10 năm được một công ty A đề xuất hai phương án chi trả lương cho người lao động như sau:

Phương án 1: người lao động sẽ nhận được 48 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

Phương án 2: người lao động sẽ nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 5 trăm nghìn đồng mỗi quý (Biết rằng 1 quý là 3 tháng).

Hỏi phương án chi trả lương nào của công ty sẽ có lợi hơn cho người lao động?

Câu 4 ***(4,0 điểm).*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^o. Gọi M là trung điểm của SD.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Câu 5 ***(2,0 điểm).*** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Hết

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:……………………………………Số báo danh………………

Họ tên, chữ ký của giám thị 1:………………………………………………………..

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CAO BẰNG ĐỀ CHÍNH THỨC	HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2020 – 2021 MÔN: TOÁN *(Hướng dẫn chấm có 06 trang)*

I – Hướng dẫn chung:

1. Điểm của bài thi theo thang điểm 20, phần lẻ được tính đến 0,25 điểm. Giám khảo giữ nguyên điểm lẻ, không được làm tròn điểm.

2. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm.

3. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng giải theo cách khác mà lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác thì vẫn cho đi số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

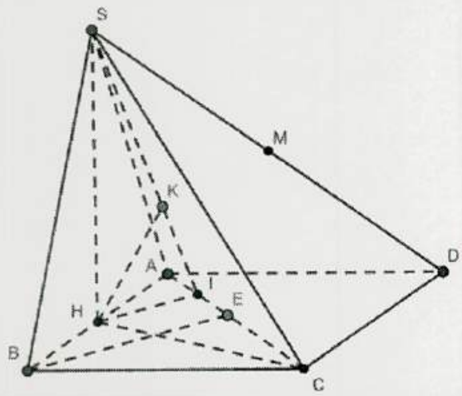
II – Đáp án và thang điểm:

Câu	**ý**	**Đáp án**	**Điểm**
1		a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ có hai điểm cực trị. b) Tìm các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=-2x^3+6x^2+1$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;1)$, B và C sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.	**4,0**
	a)	Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ $y'=x^2-2mx+m$	0,5
		Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt	0,5
		$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m>0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ Vậy với $m<0$ hoặc $m>1$ thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị.	0,5
	b)	Phương trình hoành độ giao điểm là: $-2x^3+6x^2+1=mx+1 \Leftrightarrow 2x^3-6x^2+mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2-6x+m=0(*) \end{array}\right.$	0,5
		Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(*)}>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-2m>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{9}{2} \\ m\neq 0 \end{cases}$	0,5

		Khi đó $A(0;1), B(x_1; mx_1+1), C(x_2; mx_2+1)$. Vì B là trung điểm của AC nên $x_2 = 2x_1 \quad (1)$ Mặt khác theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{2} \end{cases} \quad (2)$	0,5
		Từ (1) và (2) ta có $x_1 = 1; x_2 = 2$. Do đó $2 = \dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m = 4$ Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.	0,5
2	a) Giải phương trình: $\tan x - \sin 2x - \cos 2x + 4\cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0$. b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x-y-1) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$. c) Giải phương trình: $x^4 - 6x - 1 = 2(x+4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}$.		**6,0**
	a	Điều kiện : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$	0,25
		Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ phương trình trở thành : $\dfrac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x\cos x - \cos 2x + 4\cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0$ $\Leftrightarrow \sin x - 2\sin x\cos^2 x - \cos x.\cos 2x + 4\cos^2 x - 2 = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow -\sin x(2\cos^2 x - 1) - \cos x.\cos 2x + 2(2\cos^2 x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow -\sin x.\cos 2x - \cos x.\cos 2x + 2\cos 2\mathrm{x} = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x.(-\sin x - \cos x + 2) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$	0,5
		Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$	0,25
	b	$\begin{cases} (x-y)(x-y-1) = 0 \quad (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$ Từ (1) ta có $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y + 1 \end{array}\right.$	0,5

		*) Với $x=y$ thế vào (2) ta có $2y^2+3y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ Với $y=-1$ ta có $x=-1$; Với $y=-\frac{1}{2}$ ta có $x=-\frac{1}{2}$	0,5
		*)Với $x=y+1$ thế vào (2) ta có: $2y^2+4y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{-2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{-2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ Với $y=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ ta có $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; Với $y=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ ta có $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
		Do đó hệ phương trình đã cho có các nghiệm là: $(-1;-1)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.	0,5
	c	$x^4-6x-1=2(x+4)\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}\,(*)$ Điều kiện: $2x^3+8x^2+6x+1\ge 0$. $(*)\Leftrightarrow x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)=2(x+4)\left(\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}-x^2\right)$	0,5
		$\Leftrightarrow x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)=2(x+4)\frac{\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)-x^4}{\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2}$ $\Leftrightarrow \left[x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)\right]\left[1+\frac{2(x+4)}{\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2}\right]=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^3-8x^2-6x-1=0 \quad (1) \\ \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2+2x+8=0 \quad (2) \end{array}\right.$	0,5
		$(1)\Leftrightarrow\left(x^2-4x-1\right)\left(x^2+2x+1\right)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2\pm\sqrt{5}$.	0,5
		$(2)\Leftrightarrow\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+(x+1)^2+7=0$ (vô nghiệm)	0,25
		Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1, x=2\pm\sqrt{5}$.	0,25
3	a) Đội văn nghệ của một lớp có 5 bạn nam và 7 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn, xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số nam nhiều hơn số nữ. b) Một hợp đồng dài hạn thực hiện trong thời gian 10 năm được một công ty A đề xuất hai phương án chi trả lương cho người lao động như sau: Phương án 1: người lao động sẽ nhận được 48 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.		**4,0**

	Phương án 2: người lao động sẽ nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 5 trăm nghìn đồng mỗi quý. Hỏi phương án chi trả lương nào của công ty sẽ có lợi hơn cho người lao động?			
	a	Không gian mẫu Ω là tập hợp các cách chọn ngẫu nhiên 5 bạn tham gia biểu diễn từ đội văn nghệ gồm 12 bạn (5 nam và 7 nữ). Do đó $n(\Omega)=C_{12}^{5}=792$	0,5	
		Gọi A là biến cố trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số nam nhiều hơn số nữ. Ta có các trường hợp sau: + Chọn 4 nam và 1 nữ, có $C_5^4.C_7^1$ cách. + Chọn 3 nam và 2 nữ, có $C_5^3.C_7^2$ cách	0,5	
		Do đó $n(A)=C_5^4.C_7^1+C_5^3.C_7^2=35+210=245$	0,5	
		Vậy xác suất để trong 5 bạn được chọn có cả nam và nữ, đồng thời số nam nhiều hơn số nữ là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{245}{792}\approx 0,31$	0,5	
	b	Phương án 1: người lao động sẽ nhận được 48 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm. Mức lương người lao động nhận được mỗi năm là một cấp số cộng (u_n) với $u_1=48$, công sai $d=3$	0,5	
		Tổng số tiền người lao động được hưởng sau 10 năm là: $S_{10}=10u_1+\dfrac{10.9.d}{2}=10.48+\dfrac{10.9.3}{2}=615$ (triệu đồng)	0,5	
		Phương án 2: người lao động sẽ nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 5 trăm nghìn đồng mỗi quý. Mức lương người lao động nhận được mỗi quý là một cấp số cộng (v_n) với $v_1=7$, công sai $d=\dfrac{1}{2}$.	0,5	
		10 năm tức là 40 quý, tổng số tiền người lao động nhận được là: $S_{40}=40.v_1+\dfrac{40.39.d}{2}=40.7+\dfrac{40.39.\frac{1}{2}}{2}=670$ (triệu đồng) Vậy phương án chi trả lương thứ hai sẽ có lợi hơn cho người lao động.	0,5	
4	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^o. Gọi M là trung điểm của SD.			**4,0**

		a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a. b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) theo a.	
	a	Gọi H là trung điểm của AB. Do tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$. Do đó SH là đường cao của khối chóp S.ABCD 	0,25
		Đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Ta có diện tích đáy ABCD là $S_{ABCD} = AB.AD = a.2a = 2a^2$.	0,5
		Góc giữa SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH} = 45^o$	0,25
		Trong tam giác BHC vuông tại B ta có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$	0,25
		Tam giác SHC vuông cân tại H (Vì $\widehat{SHC} = 90^o; \widehat{SCH} = 45^o$) nên $SH = HC = \frac{a\sqrt{17}}{2}$	0,25
		Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}2a^2.\frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$.	0,5
	b	Ta có $d(M,(SAC)) = \frac{1}{2}d(D,(SAC)) = \frac{1}{2}d(B,(SAC)) = d(H,(SAC))$	0,5
		Dựng $HI \perp AC, HK \perp SI \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow HK \perp (SAC)$ $\Rightarrow d(H,(SAC)) = HK$	0,5
		Kẻ $BE \perp AC \Rightarrow HI = \frac{1}{2}BE$. Trong tam giác ABC vuông tại B, ta có $\frac{1}{BE^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BE = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HI = \frac{a}{\sqrt{5}}$	0,5
		Trong tam giác SHI vuông tại H, ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{4}{17a^2} = \frac{89}{17a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{89}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$ Vậy $d(M,(SAC)) = d(H,(SAC)) = HK = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$	0,5
5		Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:	**2,0**

	$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$		
		Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số thực dương ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}}\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a \quad (1)$	0,5
		Tương tự ta có: $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq b \quad (2)$ $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c \quad (3)$	0,5
		Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c$ $\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$	0,5
		Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$	0,5