

Bài 1. (4,0 điểm)

a) Cho $A = (x^3 + 12x - 31)^{2023}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{18 + 8\sqrt{5}}$

b) Cho biểu thức : $B = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$. Rút gọn biểu thức B

và tìm các giá trị của x để $\frac{1}{B} \leq -\frac{5}{2}$

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $T = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Chứng minh $x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$

Bài 5. (2,5 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên phương trình : $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$

b) Chứng minh rằng : $n^3 + 11n - 6n^2 - 6$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n

Bài 6 (4,5 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Điểm C là điểm bất kỳ trên (O) , ($C \neq A, C \neq B$). Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại P và Q

a) Chứng minh $\widehat{POQ} = 90^\circ$ và $AP \cdot BQ = R^2$.

b) OP cắt AC tại M , OQ cắt BC tại N . Gọi H, I lần lượt là trung điểm của MN và PQ . Đường trung trực của MN và đường trung trực của PQ cắt nhau tại K . chứng minh $AB = 4.IK$

c) Chứng minh $\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$

Bài 7. (1,0 điểm)

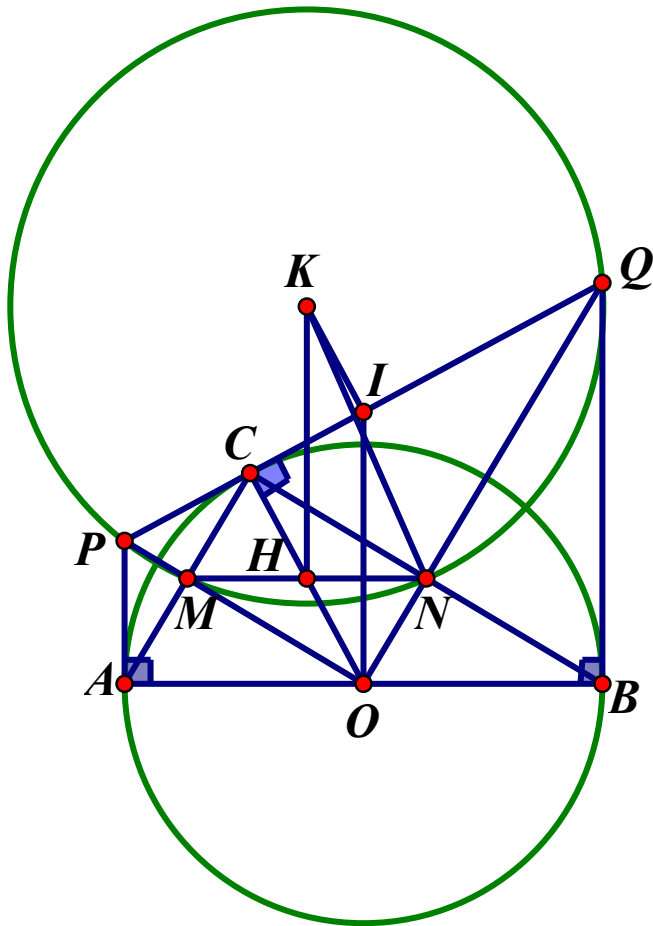
Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng 1. Tứ giác $MNPQ$ có các đỉnh nằm trên các cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng chu vi tứ giác $MNPQ$ không nhỏ hơn 2.

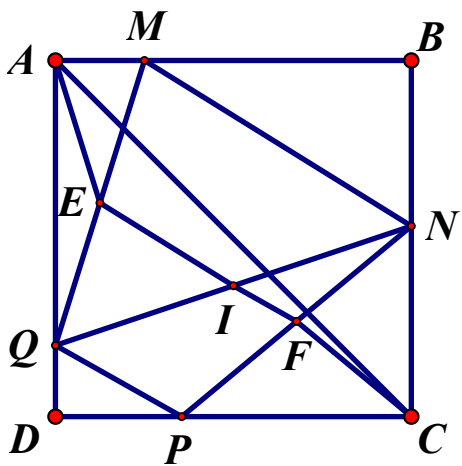
----Hết ----

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng và máy tính cầm tay.

Hướng dẫn		
Câu	Nội dung	Điểm
1		4.0
	a) Tính giá trị của biểu thức A	2.0
	Ta có: $x = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ $\Rightarrow x^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$ $\Leftrightarrow x^3 = 32 - 12x$ $\Leftrightarrow x^3 + 12x - 31 = 1$ $A = (x^3 - 12x + 31)^{2023} = 1^{2023} = 1$	
	b) Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị của x để $\frac{1}{B} \leq -\frac{5}{2}$	2.0
	ĐK: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$	
	$B = \dots = \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$	
	$\frac{1}{B} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x+1}} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$	
	$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$	
2		4.0
	a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 + x-1 = 0$	2.0
	Trường hợp 1: $x \geq 1$: ta có phương trình $x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận) Trường hợp 2: $x < 1$ ta có phương trình $x^2 - 3x + 2 - x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ (loại) Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{1\}$	
	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 & (2) \end{cases}$	2.0
	ĐK: $x \geq 1; y \geq 1$	
	(2) $\Leftrightarrow x + y = xy$ (3) Hai vế của (1) đều dương ta bình phương hai vế ta có: $x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = 4 \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{xy - (x+y) + 1} = 4$	
	Thay (3) vào ta có: $x + y = 4$ kết hợp với (3) có hệ: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$ Áp dụng hệ thức Vi Ét ta có x, y là hai nghiệm của pt: $X^2 - 4X + 4 = 0$ $\Rightarrow \Rightarrow x = 2; y = 2$	

	Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $S = \{(2; 2)\}$	
3		2.0
	Ta có $\Delta' = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm với mọi m. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases}$, suy ra $T + \frac{1}{2} = \frac{4m+1}{4m^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{4m+1+2m^2+1}{2(2m^2+1)} = \frac{2(m+1)^2}{2(2m^2+1)} = \frac{(m+1)^2}{2m^2+1} \geq 0 \Rightarrow T \geq \frac{-1}{2}$ Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$ khi $m = -1$	
4	Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$. Chứng minh $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$	2.0
	Vì $x, y \geq 0$ nên $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (bất đẳng thức Cô-si) Suy ra $2 \geq 2\sqrt{xy}$ (vì $x + y = 2$) hay $0 < \sqrt{xy} \leq 1$ Do đó $0 < xy \leq 1$ suy ra $x^2 y^2 \leq xy$ Xét vế trái $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq xy \left[(x+y)^2 - 2xy \right] = xy(4 - 2xy)$ (do $x + y = 2$) $= -2x^2 y^2 + 4xy = -(x^2 y^2 - 2xy + 1 - 1)$ $= -(xy - 1)^2 + 2 \leq 2$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.	
5		2.5
	a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$ $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$ $\Leftrightarrow y^2 + 2(x+1)y - (3x^2 - 2x + 8) = 0$ $\Delta'_y = (x+1)^2 + 3x^2 - 2x + 8 = 4x^2 + 9$ Phương trình có nghiệm $\Rightarrow \Delta'$ là số chính phương Đặt $4x^2 + 9 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) $4x^2 - m^2 = 9 \Leftrightarrow (2x - m)(2x + m) = 9$ $\Rightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$ Với $x = 2$, ta được $y^2 + 6y - 16 = 0 \Rightarrow y \in \{-8; 2\}$ Với $x = 0$, ta được $y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y \in \{-4; 2\}$ Với $x = -2$, ta được $y^2 - 2y - 24 = 0 \Rightarrow y \in \{-6; 4\}$	1.5

	Vậy nghiệm nguyên của pt là: $(2;-8);(2;2);(0;-4);(0;2);(-2;6);(-2;-4)$	
	b) Chứng minh rằng : $n^3 + 11n - 6n^2 - 6$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n với $n \in \mathbb{Z}$, ta có: $n^3 + 11n - 6n^2 - 6 = n^3 - n^2 - 5n^2 + 5n + 6n - 6$ $= n^2(n-1) - 5n(n-1) + 6(n-1)$ $= (n-1)(n^2 - 5n + 6) = (n-1)(n-2)(n-3)$ Do $n-1, n-2, n-3$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 và $(2,3) = 1$ Vậy $(n-1)(n-2)(n-3) : 6$ mọi số nguyên n	1.0
6		4.5
		
	a) Chứng minh $\widehat{POQ} = 90^\circ$ và $AP.BQ = R^2$.	2.0
	*Ta có: $\widehat{POC} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ (OP là tia giác của $\widehat{COA}$) : $\widehat{QOC} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$ (OQ là tia giác của $\widehat{COB}$) $\Rightarrow \widehat{POQ} = \widehat{POC} + \widehat{QOC} = \frac{1}{2}(\widehat{COA} + \widehat{COB}) = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ.$ * Ta có: $AP = PC; BQ = QC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) ΔPOQ vuông tại $O \Rightarrow CP.CQ = OC^2$	

	$\Rightarrow AP.BQ = R^2$	
	b) Chứng minh $AB = 4.IK$	1.5
	ta có OP là đường trung trực của $AC \Rightarrow MA = MC, \widehat{CMO} = 90^\circ$ OQ là đường trung trực của $BC \Rightarrow NB = NC, \widehat{CNO} = 90^\circ$ mà $\widehat{POQ} = 90^\circ$ nên $MONC$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OC = MN$ $AP \parallel BQ$ nên $APQB$ là hình thang cân và nhận IO là đường trung bình $\Rightarrow OI \parallel BQ$. Mà $BQ \perp AB \Rightarrow OI \perp AB$ Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AB, AB = 2MN$ Mà $KH \perp MN \Rightarrow KH \perp AB \Rightarrow KH \parallel OI \Rightarrow OHKI$ là hình bình hành $\Rightarrow IK = OH = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}AB \Rightarrow AB = 4.IK$	
	c) Chứng minh $\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$	1.0
	Ta có: $\widehat{CMO} = 90^\circ, \widehat{CNO} = 90^\circ \Rightarrow OMCN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OCN}$ (cùng chắn cung ON) Mặt khác $\widehat{OCN} = \widehat{POQ}$ (cùng phụ $\widehat{CON}$) $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{PQO}$ Ta có $\widehat{OMN} + \widehat{PMN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PQO} + \widehat{PMN} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ tứ giác $PMNQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$	
7		1.0
		
	Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm QM, PN, QN $AE = \frac{QM}{2}; EI = \frac{MN}{2}; IF = \frac{QP}{2}; FC = \frac{PN}{2}$ Chu vi của tứ giác $MNPQ$ là $MN + PN + QP + QM = 2(EI + FC + IF + AE) \geq 2AC = 2$ Vậy chu vi của tứ giác $MNPQ$ không nhỏ hơn 2	