

Môn thi: **TOÁN HỌC**Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)Ngày thi: **13 tháng 01 năm 2019**

Bài 1. Cho hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

a) Chứng minh rằng $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(x_n), (y_n)$ với $x_n < y_n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ sao cho chúng cùng hội tụ tới một giới hạn và thỏa mãn $f(x_n) = f(y_n)$ với mọi n .

Bài 2. Cho dãy số nguyên dương (x_n) thỏa mãn $0 \leq x_0 < x_1 \leq 100$ và

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - x_n + 280, \quad \forall n \geq 0.$$

a) Chứng minh rằng nếu $x_0 = 2, x_1 = 3$ thì với mỗi số nguyên dương n , tổng các ước nguyên dương của $x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+2} x_{n+3} + 2018$ thì chia hết cho 24.

b) Tìm tất cả các cặp số (x_0, x_1) để số $x_n x_{n+1} + 2019$ là số chính phương với vô số số n .

Bài 3. Với mỗi đa thức $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, đặt

$$\Gamma(f(x)) = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Cho đa thức $P(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+2020)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2019 đa thức đôi một phân biệt $Q_k(x)$ với $1 \leq k \leq 2019$ với các hệ số dương thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $\deg Q_k(x) = 2020$.

ii) $\Gamma(Q_k(x)^n) = \Gamma(P(x)^n)$ với mọi số nguyên dương n .

Bài 4. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I và trực tâm H . Trên các tia AB, AC, BC, BA, CA, CB lần lượt lấy các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sao cho $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BB_1, CC_1); (CC_1, AA_1); (AA_1, BB_1)$.

- a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không vượt quá diện tích tam giác ABC .
- b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $A'B'C'$. Các đường thẳng AJ, BJ, CJ lần lượt cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại R, S, T . Gọi K là điểm chung của các đường tròn ngoại tiếp AST, BTR, CRS . Giả sử tam giác ABC không cân, chứng minh $IHJK$ là hình bình hành.

----- **HẾT** -----