

Câu 1. (3,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$. Chứng minh

$$\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$$

2) Cho đa thức $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)$. Khi khai triển đa thức $P(x)$ ta được

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2021}x^{2021} + a_{2022}x^{2022}. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $(x+1)(3x+\sqrt{x+1}-3) = 4\sqrt{x^3}-2$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2$

2) Cho m, n, p, q là các số nguyên thỏa mãn $(m+n+p+q):30$. Chứng minh rằng $(m^5+n^5+p^5+q^5):30$

Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Đoạn thẳng OM cắt BC và cắt đường tròn (O) lần lượt tại N và D . Tia AD cắt BC tại F ; AM cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A).

1) Chứng minh rằng: $AB.KC = AC.KB$ và $\widehat{ABM} = \widehat{AHN}$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN . Chứng minh $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$.

3) Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt QH tại G . Chứng minh ba điểm A, G, N thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác đó ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.

2) Xét a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \geq 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2}$$

-----**Hết**-----

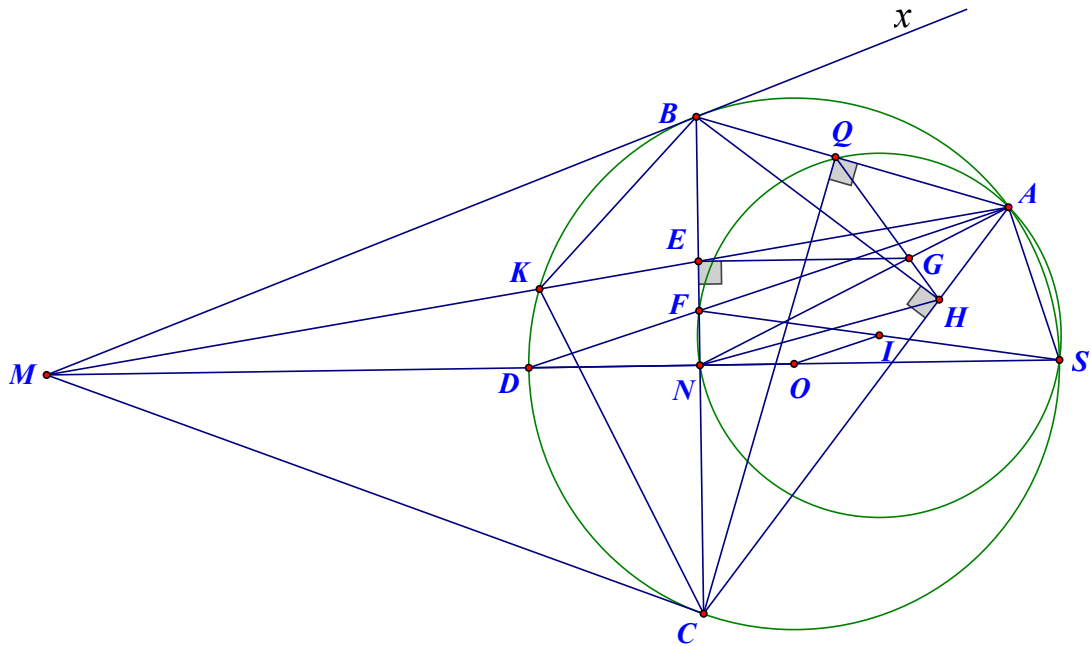
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Họ, tên và chữ ký của GT 1:.....Họ, tên và chữ ký của GT 2:.....

Câu	Đáp án	Điểm
1.1 (1,5 điểm)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$. Chứng minh $\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$	(1,5)
	Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Leftrightarrow ab + bc + ac = 1$	0,25
	Ta có $\frac{bc+1}{a^2+1} = \frac{bc+ab+bc+ac}{a^2+ab+bc+ac} = \frac{b(a+c)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}$	0,5
	Chứng minh tương tự: $\frac{ac+1}{b^2+1} = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \quad \text{và} \quad \frac{ab+1}{c^2+1} = \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}$	0,25
	Do đó: $\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}$ $= \left(\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \right) + \left(\frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+c} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) = 1 + 1 + 1 = 3$ Vậy $\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$ khi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ và $a, b, c > 0$	0,5
1.2 (1,5 điểm)	Cho đa thức $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)$. Khi khai triển đa thức $P(x)$ ta được $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022}$. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})}$	(1,5)
	Ta có: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022} = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)$ $\Rightarrow P(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \dots + a_{2022} \cdot 1^{2022} = (1+1)(1+2)(1+3)\dots(1+2022)$ $\Rightarrow P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 2023!$	0,5
	Lại có $P(-1) = a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + \dots + a_{2022} \cdot (-1)^{2022} = (-1+1)(-1+2)\dots(-1+2022)$ $\Rightarrow P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2022} = 0$ $\Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}$ Mà $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 2023!$ $\Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2021} = \frac{2023!}{2}$	0,5
	Ta có $P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_{2022} \cdot 0^{2022} = (0+1)(0+2)\dots(0+2022)$ $\Rightarrow P(0) = a_0 = 2022!$ Do đó	0,5

	$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})} = 1 - \frac{2022!}{2 \cdot \frac{2023!}{2}} = 1 - \frac{2022!}{2023!}$ $= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}$	
2.1 (2,5 điểm)	Giải phương trình $(x+1)(3x+\sqrt{x+1}-3) = 4\sqrt{x^3}-2$	(2,5)
	Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$	0,25
	Khi đó phương trình đã cho tương đương với $3x^2 + 3x - 3x - 3 + (x+1)\sqrt{(x+1)} = 4x\sqrt{x} - 2$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 4x\sqrt{x} + x + (x+1)\sqrt{(x+1)} - (x+1) = 0$ $\Leftrightarrow x(3x - 4\sqrt{x} + 1) + (x+1)(\sqrt{(x+1)} - 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x(3x - 4\sqrt{x} + 1) + \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} = 0$ $\Leftrightarrow x\left(3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1} = 0 \end{cases}$	0,25
	Ta thấy: $3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1} = 3x - 4\sqrt{x} + \frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$ $= 3\left(\sqrt{x} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{4}{3}$ $= 3\left(\sqrt{x} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6x+4-2\sqrt{x+1}}{6(\sqrt{x+1}+1)}$	0,25
	$= 3\left(\sqrt{x} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2 + 5x+2}{6(\sqrt{x+1}+1)} > 0$	0,5
	Với $x=0$ thỏa mãn điều kiện Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$.	0,25
2.2 (2,5 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$	(2,5)
	Điều kiện: $\begin{cases} 5-2(x+y) \geq 0 \\ 2-x^2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq \frac{5}{2} \\ x^2y^2 \leq 2 \end{cases}$	
	Kết hợp với phương trình trong hệ ta được điều kiện $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$	0,5
	Từ phương trình $x(y+1)+y=3 \Leftrightarrow xy+x+y=3 \Leftrightarrow x+y=3-xy$ thế vào phương trình $\sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$ ta được $\sqrt{5-2(3-xy)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$ $\Leftrightarrow \sqrt{5-6+2xy}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$ $\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$	0,5

	$\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1} + \sqrt{2-x^2y^2} = 2$ $\Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{2xy-1} - 2\sqrt{2-x^2y^2} = 0$ $\Leftrightarrow 2xy - 1 - 2\sqrt{2xy-1} + 1 + 2 - x^2y^2 - 2\sqrt{2-x^2y^2} + 1 + x^2y^2 - 2xy + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2xy-1}-1)^2 + (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 + (xy-1)^2 = 0$	0,5
	Với $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$ thì $\begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 \geq 0 \\ (xy-1)^2 \geq 0 \end{cases}$ Do đó phương trình $(\sqrt{2xy-1}-1)^2 + (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 + (xy-1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 = 0 \\ (xy-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy-1} = 1 \\ \sqrt{2-x^2y^2} = 1 \Leftrightarrow xy = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$	0,5
	Với $xy = 1$ kết hợp với $x + y = 3 - xy$ ta được $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ (2 - y)y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ Với $x = y = 1$ thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 1)$	0,5
3.1 (1,5 điểm)	Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2$.	(1,5)
	Ta có: $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2 \Leftrightarrow p^4 - (q^2 + 1)^2 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - q^2 - 1) - q^2(p^2 + q^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - 2q^2 - 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - 2q^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow p^2 - 2q^2 - 1 = 0 \quad (\text{do } p, q \text{ là các số nguyên tố})$ $\Leftrightarrow p^2 - 1 = 2q^2 \Leftrightarrow (p-1)(p+1) = 2q^2$	0,25
	Nếu $p = 2 \Rightarrow (2-1)(2+1) = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{3}{2}$ (Loại do q là số nguyên tố)	0,25
	Nếu $p \geq 3$, mà p nguyên tố thì $p-1$ và $p+1$ là các số chẵn do đó $(p-1)(p+1) : 4 \Rightarrow 2q^2 : 4 \Rightarrow q^2 : 2, \text{ mà } q \text{ nguyên tố} \Rightarrow q = 2$ Thay $q = 2$ vào $p^2 - 1 = 2q^2 \Rightarrow p^2 = 9 \Rightarrow p = 3$ thỏa mãn Vậy tất cả các số nguyên tố p, q là $\begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \end{cases}$	0,5
3.2 (1,5 điểm)	Cho m, n, p, q là các số nguyên thỏa mãn $(m+n+p+q):30$. Chứng minh rằng $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5):30$	(1,5)
	Ta có: $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m-1)(m+1)(m^2 + 1)$ $= m(m-1)(m+1)(m^2 + 1)$ $= m(m-1)(m+1)(m^2 - 4 + 5)$ $= m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2) + 5m(m-1)(m+1)$	0,25

	Ta có $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5 $5m(m-1)(m+1)$ là tích của 5 và 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5 Mà $\text{ƯCLN}(2, 3, 5) = 1$ nên $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2) : 30$ và $5m(m-1)(m+1) : 30$. Do đó $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2) + 5m(m-1)(m+1) : 30 \Rightarrow (m^5 - m) : 30$	0,5
	Chúng minh tương tự ta được $\begin{cases} (n^5 - n) : 30 \\ (p^5 - p) : 30 \\ (q^5 - q) : 30 \end{cases}$	0,25
	Do đó $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5) - (m + n + p + q) : 30$ mà $(m + n + p + q) : 30$. Vậy $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5) : 30$	0,5
4	Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Đoạn thẳng OM cắt BC và cắt đường tròn (O) lần lượt tại N và D. Tia AD cắt BC tại F; AM cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K khác A.	(7,0)
		
4.1 (2,5 điểm)	Chứng minh rằng: $AB.KC = AC.KB$ và $\widehat{ABM} = \widehat{AHN}$. Trong (O) có: $\widehat{MBK} = \widehat{BAK}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\widehat{BK}$) Xét $\triangle MBK$ và $\triangle MAB$ có: $\widehat{MBK} = \widehat{BAK}$ và chung $\widehat{BMK} \Rightarrow \triangle MBK$ và $\triangle MAB$ đồng dạng. $\Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{MB}{MA}$ (1) Tương tự chứng minh được $\triangle MCK$ và $\triangle MAC$ đồng dạng. $\Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{MC}{MA}$ (2) Do $MB; MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MB = MC$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC} \Rightarrow AB.KC = AC.BK$ Trong (O) có: $\widehat{ACB} = \widehat{ABx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\widehat{AB}$) Có $MB = MC; OB = OC \Rightarrow OM$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow N$ là trung điểm của BC	(2,5)
		0,5
		0,5
		0,25
		0,5
		0,25

	Do BH là đường cao của $\triangle ABC$ nên $\triangle BHC$ vuông tại H , mà N là trung điểm của BC nên $NB = NC = NH$ nên $\triangle NHC$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{ACB}$. Do đó $\widehat{NHC} = \widehat{ABx}$	0,25
	Ta có $\widehat{NHC} + \widehat{AHN} = 180^\circ$; $\widehat{ABx} + \widehat{ABM} = 180^\circ$; $\widehat{NHC} = \widehat{ABx} \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{ABM}$	0,25
4.2 (2,5 điểm)	Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN. Chứng minh $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$	(2,5)
	Kẻ tia MO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là S khác điểm $D \Rightarrow SN \perp BC \Rightarrow \widehat{FNS} = 90^\circ \Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính FS	0,5
	Trong (O) có: $\widehat{DAS} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{FAS} = 90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính FS	0,5
	Do đó 4 điểm A, F, N, S cùng thuộc đường tròn đường kính FS . Suy ra tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AFN$ là trung điểm của FS	0,5
	Trong $\triangle DFS$ có I là trung điểm của FS ; O là trung điểm của $DS \Rightarrow OI$ là đường trung bình	0,5
	$\Rightarrow OI \parallel DF \Rightarrow OI \parallel AD \Rightarrow \widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$	0,5
4.3 (2,0 điểm)	Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt QH tại G. Chứng minh ba điểm A, G, N thẳng hàng.	(2,0)
	Gọi G' là giao điểm của AN và QH Chứng minh được $\triangle ABH$ và $\triangle BMN$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AH}{BN} = \frac{AB}{BM}$, mà $NB = NH$ $\Rightarrow \frac{AH}{NH} = \frac{AB}{BM}$ mà $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$ suy ra $\triangle AHN$ và $\triangle ABM$ đồng dạng. Do đó $\widehat{NAH} = \widehat{MAB}$ hay $\widehat{G'AH} = \widehat{EAB}$ (4)	0,5
	Chứng minh được $\triangle AQC$ và $\triangle AHB$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AQ}{AH} = \frac{AC}{AB}$, suy ra $\triangle AQH$ và $\triangle ACB$ đồng dạng. Do đó $\widehat{AHQ} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{AHG'} = \widehat{ABE}$ (5)	0,5
	Từ (4) và (5) suy ra $\triangle AHG'$ và $\triangle ABE$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AG'}{AE} = \frac{AH}{AB}$ mà $\frac{AH}{AB} = \frac{AN}{AM}$ (do $\triangle AHN$ và $\triangle ABM$ đồng dạng) $\Rightarrow \frac{AG'}{AE} = \frac{AN}{AM}$. Theo định lí Ta-lét đảo suy ra $EG' \parallel MN$	0,5
	Ta có $EG \parallel MN$ (vì cùng vuông góc với BC). Do đó E, G, G' thẳng hàng, mà $G, G' \in QH$ suy ra G' và G trùng nhau. Vậy ba điểm A, G, N thẳng hàng.	0,5
5.1 (1,0 điểm)	Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.	(1,0)
	Nối các điểm trong 2023 điểm đã cho tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín ngũ giác. Giả sử có n tam giác được tạo thành. Khi đó tổng tất cả các góc của n tam giác này là $n.180^\circ$	0,25
	Tổng trên có thể tính thông qua những tổng sau : - Tổng các góc xung quanh một điểm trong ngũ giác là 360° mà có 2018 điểm trong ngũ giác do đó tổng số đo là 2018.360° . - Tổng các góc tại 5 đỉnh của ngũ giác là 3.180°	0,25
	Do đó ta có $n.180^\circ = 3.180^\circ + 2018.360^\circ \Rightarrow n = 4039$	0,25
	Như vậy ta có 4039 tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh tạo thành từ 2023 điểm phân biệt như đề bài phủ kín hình ngũ giác. Vì diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị nên luôn tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.	0,25

5.2 (1,0 điểm)	Xét a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{a + b^2 + c} + \frac{1}{a + b + c^2}$ (1,0)	
	Ta có : $x(y-1)^2 \geq 0$ với $x, y > 0$ $\Rightarrow xy^2 - 2xy + x \geq 0 \Rightarrow xy^2 + x \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy^2 + x \geq (x+y)^2$ $\Rightarrow y^2(x+1) + x(x+1) \geq (x+y)^2 \Rightarrow (y^2+x)(x+1) \geq (x+y)^2$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2+x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2}.$ Đẳng thức xảy ra khi $y = 1$ Vậy $\frac{1}{y^2+x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2} (*)$ với $x, y > 0$	0,25
	Áp dụng BĐT (*) ta có : $\frac{1}{a^2+b+c} \leq \frac{b+c+1}{(a+b+c)^2}.$ $\frac{1}{a+b^2+c} \leq \frac{a+c+1}{(a+b+c)^2}.$ $\frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{b+a+1}{(a+b+c)^2}.$ Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2}$	0,25
	Ta chứng minh $\frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1$ Thật vậy : $\frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) - 3 \geq 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c+1)(a+b+c-3) \geq 0 \text{ luôn đúng do } a+b+c \geq 3$ Suy ra $Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1$	0,25
	Vậy GTLN của Q là 1 khi $\begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$	0,25

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng mà cách giải khác với đáp án và phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

-----Hết-----