

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức:

$$A = \left[\frac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right] : \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x^4 - x^3 - 10x^2} - 1.$$

2) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ và $x + y + z = 3$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (x^{2023} + y^{2023}) \cdot (y^{2023} + z^{2023}) \cdot (z^{2023} + x^{2023}).$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11, chia cho $x+2$ dư (-1) , chia cho x^2-4 được thương là $3x$ và còn dư. Tính $f(2023) + f(-2023)$.

2) Tìm tất cả giá trị của số tự nhiên n để biểu thức $B = n^6 - n^4 - 2n^3 + 2n^2$ có giá trị là một số chính phương.

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x(x^2 + 2x + 4) = y^3 - 3$.

2) Giải phương trình: $\left(\frac{x+3}{x-2} \right)^2 + 6 \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^2 + \frac{63-7x^2}{x^2-4} = 0$.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AD, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC , E là điểm đối xứng của H qua O . Kẻ CF vuông góc với đường thẳng BE tại F .

1) Tính số đo $\widehat{FMN}$.

2) Gọi K, L, R lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ N đến các đường thẳng AC, AD, BC . Gọi giao điểm của DM và CN là S . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm K, L, R thẳng hàng.

b) $HN \cdot CS = NC \cdot SH$.

3) Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I , kẻ đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AI tại P , đường thẳng CP cắt đường thẳng AO tại Q . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng IQ . Chứng minh đường thẳng PG đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Xét x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x \cdot y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2(x^3 + y^3)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)}$.

2) Một chiếc hộp đựng 99 chiếc thẻ màu vàng, 100 chiếc thẻ màu đỏ và 101 chiếc thẻ màu xanh. Người ta tiến hành trò chơi rút thẻ như sau: mỗi lần rút thẻ người ta lấy ra hai chiếc thẻ khác màu và thay vào đó bằng hai chiếc thẻ có màu còn lại, quá trình này diễn ra liên tục. Hỏi đến một lúc nào đó người ta có thể nhận được trong hộp tất cả các thẻ có cùng một màu hay không? Hãy giải thích vì sao?

.....**Hết**.....

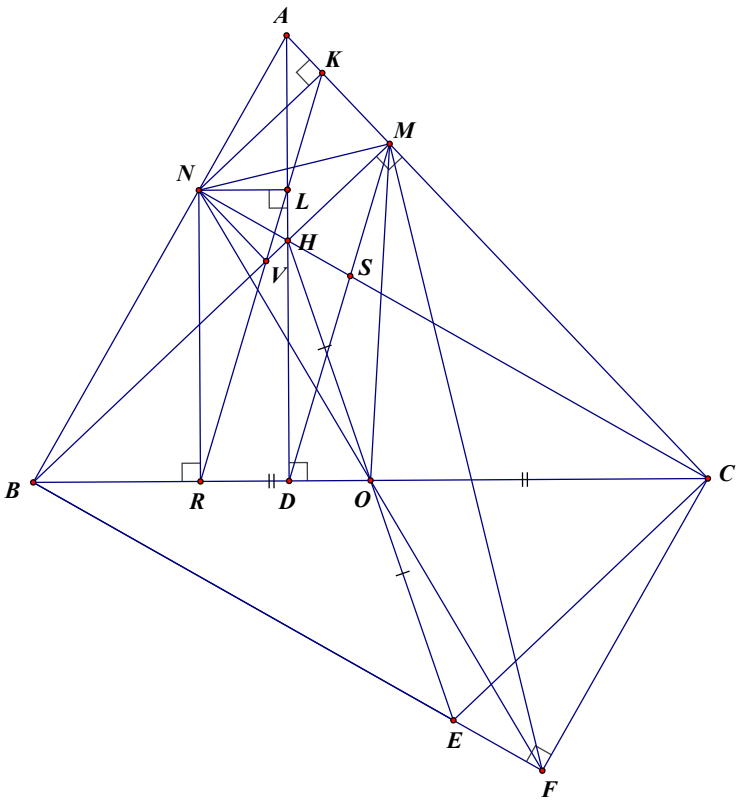
Họ tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

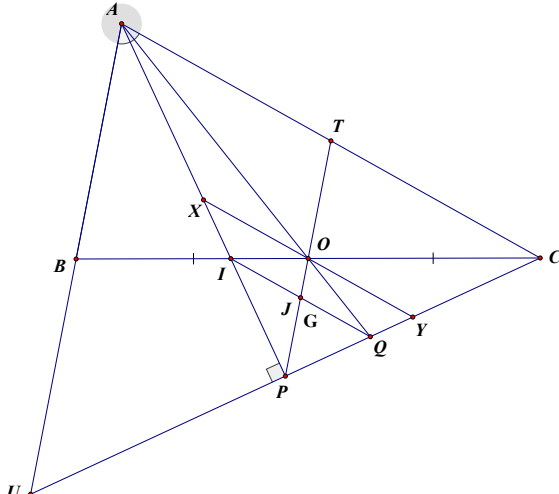
Họ, tên và chữ ký của GT1:..... Họ, tên và chữ ký của GT2:.....

Câu	Đáp án	Điểm
1.1 (2,0 đ)	Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $A = \left[\frac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right] : \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x^4 - x^3 - 10x^2} - 1.$	(2,0)
	Điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \neq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \neq 0 \\ 2x^2 - 3x - 5 \neq 0 \\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 \neq 0 \end{cases}$	0,25
	Tìm đúng điều kiện và kết luận $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1; x \neq -2; x \neq \frac{5}{2}$	0,25
	$A = \left[\frac{2}{(x-1)^3} \cdot \frac{1-x}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} \right] : \frac{(2x-5) \cdot (x+1)}{x^2(2x-5) \cdot (x+2)} - 1$	0,5
	$A = \left[\frac{-2}{x(x-1)^2} + \frac{1+x^2}{x^2(x-1)^2} \right] : \frac{x+1}{x^2(x+2)} - 1$	0,25
	$A = \frac{-2x+1+x^2}{x^2(x-1)^2} : \frac{x+1}{x^2(x+2)} - 1$	0,25
	$A = \frac{(x-1)^2}{x^2(x-1)^2} \cdot \frac{x^2(x+2)}{x+1} - 1 = \frac{x+2}{x+1} - 1 = \frac{1}{x+1}$	0,25
	Vậy với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1; x \neq -2; x \neq \frac{5}{2}$ thì $A = \frac{1}{x+1}$	0,25
1.2 (2,0đ)	Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ và $x + y + z = 3$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (x^{2023} + y^{2023}) \cdot (y^{2023} + z^{2023}) \cdot (z^{2023} + x^{2023})$.	(2,0)
	Kết hợp $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ và $x + y + z = 3$ ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{z(x+y+z)} = 0 \Leftrightarrow z(x+y)(x+y+z) + xy(x+y) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+y)(xz + yz + z^2 + xy) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$	0,25
	Nếu $x+y=0$ thì $x=-y \Rightarrow x^{2023} = -y^{2023} \Rightarrow x^{2023} + y^{2023} = 0$ $P = (x^{2023} + y^{2023}) \cdot (y^{2023} + z^{2023}) \cdot (z^{2023} + x^{2023}) = 0$	0,25 0,25
	Tương tự nếu $y+z=0$ hoặc $z+x=0$ thì $P=0$	0,25

	Vậy với x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ và $x + y + z = 3$ thì $P = 0$	
2.1 (2,0đ)	Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 11, chia cho $x + 2$ dư -1 , chia cho $x^2 - 4$ được thương là $3x$ và còn dư. Tính $f(2023) + f(-2023)$.	(2,0)
	$f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 11 $\Rightarrow f(x) = (x - 2).P(x) + 11 \Rightarrow f(2) = 11$	0,25
	$f(x)$ chia cho $x + 2$ dư $-1 \Rightarrow f(x) = (x + 2).Q(x) - 1 \Rightarrow f(-2) = -1$	0,25
	$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $3x$ và còn dư $\Rightarrow f(x) = (x^2 - 4).3x + ax + b$ (1)	0,25
	Từ (1) $\Rightarrow f(2) = 2a + b, f(-2) = -2a + b$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 11 \\ -2a + b = -1 \end{cases}$ tìm được $a = 3, b = 5$	0,25
	Suy ra $f(x) = (x^2 - 4).3x + 3x + 5 = 3x^3 - 9x + 5$	0,25
	$f(2023) + f(-2023) = 3.2023^3 - 9.2023 + 5 + 3.(-2023)^3 - 9.(-2023) + 5$ $\Rightarrow f(2023) + f(-2023) = 10$	0,25 0,25
2.2 (2,0đ)	Tìm tất cả giá trị của số tự nhiên n để biểu thức $B = n^6 - n^4 - 2n^3 + 2n^2$ có giá trị là một số chính phương.	(2,0)
	$B = n^6 - n^4 - 2n^3 + 2n^2 = n^2(n^4 - n^2 - 2n + 2)$	0,25
	$= n^2(n - 1)^2.(n^2 + 2n + 2)^{(*)}$	0,25
	- Xét $n = 0$ thì $B = 0$ là số chính phương	0,25
	- Xét $n = 1$ thì $B = 0$ là số chính phương	0,25
	- Xét $n \geq 2$ ta thấy $n^2(n - 1)^2$ là số chính phương, $n^2 + 2n + 2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ $n^2 + 2n + 2 < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$	0,25
	Suy ra $(n + 1)^2 < n^2 + 2n + 2 < (n + 2)^2$	0,25
	Mà $(n + 1)^2$ và $(n + 2)^2$ là 2 số chính phương liên tiếp $\Rightarrow n^2 + 2n + 2$ không phải là số chính phương (**).	0,25
	Từ (*) và (**) suy ra B không là số chính phương với $n \geq 2$ Vậy $n = 0$ hoặc $n = 1$ thì B có giá trị là số chính phương.	0,25
3.1 (1,5đ)	Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x(x^2 + 2x + 4) = y^3 - 3$.	(1,5)
	$x(x^2 + 2x + 4) = y^3 - 3 \Leftrightarrow y^3 = x^3 + 2x^2 + 4x + 3^{(*)}$	0,25
	Ta có $2x^2 + 4x + 3 = 2.(x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi $x \Rightarrow y^3 > x^3$ (1)	
	$y^3 = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^3 - 4(x + 1)^2 - 1 < (x + 2)^3$ với mọi x (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $x^3 < y^3 < (x + 2)^3$ Mà x, y nguyên nên $y = x + 1$	0,25
	Thay $y = x + 1$ vào (*) ta được: $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	0,25

	$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$	0,25
	Với $x = -1$ thì $y = 0$ Với $x = 2$ thì $y = 3$ Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên là $(x; y) = (-1; 0); (x; y) = (2; 3)$.	0,25
3.2 (1,5đ)	Giải phương trình $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 + \frac{63-7x^2}{x^2-4} = 0$.	(1,5đ)
	Điều kiện xác định $x \neq 2, x \neq -2$	0,25
	Phương trình được viết lại $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - 7\frac{x^2-9}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - 7\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = 0$	0,25
	Đặt $u = \frac{x+3}{x-2}; v = \frac{x-3}{x+2}$, Phương trình trở thành $u^2 - 7uv + 6v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-6v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$	0,25
	TH1: $u = v \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x = 0 (TMĐK)$	0,25
	TH2: $u = 6v \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-2} = 6 \cdot \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 36 = x^2 + 5x + 6$ $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (TMĐK) \\ x = 6 (TMĐK) \end{cases}$	0,25
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0; 1; 6\}$	0,25
4	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AD, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC, E là điểm đối xứng của H qua O. Kẻ CF vuông góc với đường thẳng BE tại F. 1) Tính số đo $\widehat{FMN}$. 2) Gọi K, L, R lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ N đến các đường thẳng AC, AD, BC. Gọi giao điểm của DM và CN là S. Chứng minh rằng: a) Ba điểm K, L, R thẳng hàng. b) $HN \cdot CS = NC \cdot SH$. 3) Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I, kẻ đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AI tại P, đường thẳng CP cắt đường thẳng AO tại Q. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng IQ. Chứng minh đường thẳng PG đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.	(7,0)

		
	Tính số đo $\widehat{FMN}$.	2,0
	Vì E đối xứng với H qua O nên O là trung điểm của EH .	0,25
	Chứng minh được tứ giác $BHCE$ là hình bình hành $\Rightarrow CH \parallel EB$.	0,25
	Chứng minh được tứ giác $BNCF$ là hình chữ nhật	0,25
	$\Rightarrow O$ là trung điểm của NF và $BC = NF$.	0,25
4.1 (2,0đ)	BM là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow BM \perp AC \Rightarrow \triangle BMC$ vuông tại M .	
	Vì MO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông BMC	
	$\Rightarrow MO = \frac{1}{2} BC$	0,25
	$\Rightarrow MO = \frac{1}{2} NF$.	0,25
	Xét $\triangle MNF$ có MO là đường trung tuyến và $MO = \frac{1}{2} NF \Rightarrow \triangle MNF$ vuông tại M	0,25
	$\Rightarrow \widehat{FMN} = 90^\circ$.	0,25
4.2 (3,0đ)	Gọi K, L, R lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ N đến các đường thẳng AC, AD, BC . Gọi giao điểm của DM và CN là S . Chứng minh rằng: a) Ba điểm K, L, R thẳng hàng. b) $HN \cdot CS = NC \cdot SH$.	3,0
4.2a (1,25đ)	Chứng minh được $NK \parallel BM \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AN}{AB}$.	0,25
	Chứng minh được $NL \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AL}{AD}$.	0,25
	$\Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AL}{AD} \Rightarrow KL \parallel DM$. (1)	0,25
	Chứng minh tương tự ta được $KR \parallel DM$. (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra 3 điểm K, L, R thẳng hàng.	0,25

4.2b (1,75đ)	Gọi V là giao điểm của KR và BM . Chứng minh được $NR//AD \Rightarrow \frac{BN}{BA} = \frac{BR}{BD}$. (3)	0,25
	Vì $KR//MD \Rightarrow \frac{BR}{BD} = \frac{BV}{BM}$. (4)	0,25
	Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{BN}{BA} = \frac{BV}{BM} \Rightarrow NV//AC$.	0,25
	Chứng minh được tứ giác $MKNV$ là hình chữ nhật, suy ra được $\widehat{NMH} = \widehat{KVM}$. Vì $KR//DM$ nên $\widehat{SMH} = \widehat{KVM} \Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{NMH} \Rightarrow MH$ là tia phân giác của $\widehat{NMS}$.	0,25
	Xét ΔNMS có MH là đường phân giác $\Rightarrow \frac{HN}{HS} = \frac{MN}{MS}$. (5)	0,25
	Chứng minh được MC là đường phân giác góc ngoài của $\Delta NMS \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{MN}{MS}$. (6)	0,25
	Từ (5) và (6) $\Rightarrow \frac{HN}{HS} = \frac{CN}{CS} \Rightarrow HN.CS = NC.SH$.	0,25
4.3 (2,0đ)	Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I, kẻ đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AI tại P, đường thẳng CP cắt đường thẳng AO tại Q, gọi G là trung điểm của đoạn thẳng IQ. Chứng minh đường thẳng PG đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.	2,0
		
Gọi giao điểm của CP với AB là U, giao điểm của PO với IQ và AC lần lượt là J và T . Kẻ đường thẳng đi qua O và song song với AC cắt AI và CP lần lượt tại X và Y Chứng minh được ΔAUC cân tại A $\Rightarrow P$ là trung điểm của UC $\Rightarrow OP//BU \Rightarrow T$ là trung điểm của AC		0,25 0,25
Xét ΔPTA có $OX//AT \Rightarrow \frac{OX}{TA} = \frac{PO}{PT}$		0,25
Xét ΔPTC có $OY//CT \Rightarrow \frac{OY}{TC} = \frac{PO}{PT} \Rightarrow \frac{OX}{TA} = \frac{OY}{TC} \Rightarrow OX=OY$		0,25
Xét ΔAQC có $OY//AC \Rightarrow \frac{QO}{QA} = \frac{OY}{AC}$		0,25
Xét ΔAIC có $OX//AC \Rightarrow \frac{IO}{IC} = \frac{OX}{AC}$ Suy ra $\frac{QO}{QA} = \frac{IO}{IC} \Rightarrow IQ//AC$		0,25
Xét ΔAPT có $IJ//AT \Rightarrow \frac{IJ}{AT} = \frac{PJ}{PT}$, Xét ΔCPT có $QJ//CT \Rightarrow \frac{QJ}{CT} = \frac{PJ}{PT}$		0,25

	$\Rightarrow \frac{IJ}{AT} = \frac{QJ}{CT} \Rightarrow IJ = QJ \Rightarrow J$ là trung điểm của $IQ \Rightarrow J$ trùng với $G \Rightarrow PG$ đi qua trung điểm của AC .	0,25
5.1 (1,0đ)	Xét x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x \cdot y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2(x^3 + y^3)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)}$.	1,0
	$A = \frac{2(x^3 + y^3)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)} = \frac{x^3 + y^3 + x^3 + y^3}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)} = \frac{x^3 + y^3 + 1 \cdot (x^3 + y^3)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)}$ $\frac{x^3 + y^3 + xy \cdot (x^3 + y^3)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)} = \frac{y \cdot (x^4 + y^2) + x \cdot (x^2 + y^4)}{(x^4 + y^2)(x^2 + y^4)} = \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4}$	0,25
	Ta có $(x^2 - y)^2 \geq 0 \forall x, y \Rightarrow x^4 + y^2 \geq 2x^2y \forall x, y \Rightarrow \frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$ (do $x, y > 0$)	0,25
	Chúng minh tương tự $\frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq 1$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = y \\ x = y^2 \Leftrightarrow x = y = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$. Vậy giá trị lớn nhất của $A = 1$ khi $x = y = 1$	0,25
5.2 (1,0đ)	Một chiếc hộp đựng 99 chiếc thẻ màu vàng, 100 chiếc thẻ màu đỏ và 101 chiếc thẻ màu xanh. Người ta tiến hành trò chơi rút thẻ như sau: mỗi lần rút thẻ người ta lấy ra hai chiếc thẻ khác màu và thay vào đó bằng hai chiếc thẻ có màu còn lại, quá trình này diễn ra liên tục. Hỏi đến một lúc nào đó người ta có thể nhận được trong hộp tất cả các thẻ có cùng một màu hay không? Hãy giải thích vì sao?	1,0
	Ta thấy 99 chia cho 3 dư 0, 100 chia cho 3 dư 1, 101 chia cho 3 dư 2, do đó số lượng thẻ mỗi loại khi chia cho 3 được các số dư khác nhau là 0, 1, 2.	0,25
	Sau mỗi lần rút thẻ, số lượng thẻ mỗi loại trong hộp giảm đi 1 hoặc tăng thêm 2. Khi đó số dư của chúng khi chia cho 3 thay đổi như sau: Số thẻ chia cho 3 dư 0 sau mỗi lần rút sẽ chia cho 3 dư 2. Số thẻ chia cho 3 dư 1 sau mỗi lần rút sẽ chia cho 3 dư 0. Số thẻ chia cho 3 dư 2 sau mỗi lần rút sẽ chia cho 3 dư 1.	0,25
	Do đó sau mỗi lần rút thẻ, số thẻ mỗi loại trong hộp khi chia cho 3 vẫn có số dư khác nhau là 0, 1, 2. Giả sử đến một lúc nào đó người ta có thể nhận được trong hộp tất cả các thẻ có cùng một màu thì số thẻ 2 màu còn lại bằng 0, số dư của chúng khi chia cho 3 bằng 0, điều này mâu thuẫn với kết luận trên.	0,25
	Vậy không thể nhận được các thẻ trong hộp có cùng một màu.	0,25

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng mà cách giải khác với đáp án và phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

-----Hết-----