SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(6,0 điểm)*

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng (d) có phương trình: $y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{5}{4}$ (với O là gốc tọa độ).

2. Cho hàm số $y=x^3+2(m+1)x^2+(8m-3)x+8m-6$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy.

3. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{2018}(2-\cos 2x)}{x^2}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sin(\frac{5\pi}{4}-3x)-16=-15\sin(\frac{\pi}{4}+x)$

2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Câu 3. *(3,0 điểm)* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3(x+5)\sqrt{2+x}=1+3y^2 \\ 2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}=y^2(3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8) \end{cases}$$

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm M(1; 0) là trung điểm của cạnh BC, điểm N thuộc cạnh CD sao cho CN = 2ND, phương trình đường thẳng AN là: x − y + 2 = 0. Tìm tọa độ điểm A biết điểm A có hoành độ dương.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng $a\sqrt{3}$, SA=a, SB=SC=SD=$a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD.

1. Tính thể tích của khối chóp S.ABCM

2. Tính khoảng cách giữa SM và BC.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge -5$$

— HẾT —

Họ và tên thí sinh:.. *SBD:*....................

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 12 TỈNH THÁI BÌNH NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1: (***6,0 điểm***).

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng (d) có phương trình: $y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{5}{4}$ (với O là gốc tọa độ).

2. Cho hàm số $y=x^3+2(m+1)x^2+(8m-3)x+8m-6$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ $\mathrm{O}xy$.

3. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{2018}(2-\cos 2x)}{x^2}$.

Câu 2: (***4,0 điểm***)

1. Giải phương trình: $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}-3x\right)-16=-15\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫn nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Câu 3: (***3,0 điểm***) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3(x+5)\sqrt{2+x}=1+3y^2 \quad (1)\\ 2+\sqrt{x^2-2\mathrm{x}+4}+\sqrt{x^2-6\mathrm{x}+12}=y^2\left(3\sqrt{x^2-2\mathrm{x}+4}+5\sqrt{x^2-6\mathrm{x}+12}+8\right) \quad (2)\end{cases}$$

Câu 4: (***2,0 điểm***)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $M(1;0)$ là trung điểm của cạnh BC, điểm N thuộc cạnh CD sao cho $CN=2ND$, phương trình đường thẳng AN là: $x-y+2=0$. Tìm tọa độ điểm A biết điểm A có hoành độ dương

Câu 5: ***(3,0 điểm)***

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $SA=a$, $SB=SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm CD.

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC.

Câu 6: (***2,0 điểm***) Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge -5$.

ĐÁP ÁN

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ $\left(C\right)$ và đường thẳng $\left(d\right)$ có phương trình: $y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{5}{4}$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

Xét phương trình:

$$\frac{2x+1}{x-1}=2x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ 2x+1=\left(x-1\right)\left(2x+m\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ g\left(x\right)=2x^2+\left(m-4\right)x-\left(m-1\right)=0\end{cases}$$

+) Đường thẳng $\left(d\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(m-4\right)^2+8\left(m-1\right)>0\Leftrightarrow m^2+24>0\ (\forall m\in\mathbb{R})\\ g\left(1\right)=-3\neq 0\end{cases}$$

+) Gọi $A\left(x_1;2x_1+m\right);B\left(x_2;2x_2+m\right)$

Khi đó x_1,x_2 là hai nghiệm: $g\left(x\right)=0$. Theo Viet thì $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{m-4}{2}\\ x_1x_2=-\dfrac{m+1}{2}\end{cases}$

Ta có $\left(d\right):2x-y+m=0$

$$d\left(O,d\right)=\frac{|m|}{\sqrt{5}};AB^2=5\left(x_1-x_2\right)^2=5\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]=5\left(\frac{m^2-8m+16}{4}+\frac{4m+4}{2}\right)=\frac{5\left(m^2+24\right)}{4}$$

Khi đó: $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}d\left(O,d\right).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|m|}{\sqrt{5}}.\dfrac{\sqrt{5\left(m^2+24\right)}}{2}=\dfrac{|m|\sqrt{m^2+24}}{4}$

$$S_{OAB}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow|m|\sqrt{m^2+24}=5\Leftrightarrow m^4+24m^2-25=0\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)\left(m^2+25\right)=0\Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Vậy $m=\pm 1$

2. Cho hàm số $y=x^3+2(m+1)x^2+(8m-3)x+8m-6$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+4(m+1)x+(8m-3)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{4+\sqrt{3}}{2} \\ m < \dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Đường thẳng qua hai điểm cực tri của đồ thị hàm số có phương trình:

$$y = \frac{2}{9}\left(-4m^2 + 16m - 13\right)x + \frac{2}{9}\left(-8m^2 + 31m - 24\right)$$

Gọi $\left(x_1; y_1\right); \left(x_2; y_2\right)$ điểm cực trị của đồ thị hàm số. Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-4(m+1)}{3} \\ x_1.x_2 = \dfrac{8m-3}{3} \end{cases}$

$$y_1 = \frac{2}{9}\left(-4m^2 + 16m - 13\right)x_1 + \frac{2}{9}\left(-8m^2 + 31m - 24\right);$$

$$y_2 = \frac{2}{9}\left(-4m^2 + 16m - 13\right)x_2 + \frac{2}{9}\left(-8m^2 + 31m - 24\right);$$

Vì hàm số $y = x^3 + 2(m+1)x^2 + (8m-3)x + 8m - 6$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên không xảy ra trường hợp đồ thị hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ nhất, một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ ba của hệ trục tọa độ $\mathrm{Ox}y$.

Để một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ $\mathrm{Ox}y$ thì $\begin{cases} x_1.x_2 < 0 \\ y_1.y_2 < 0 \end{cases}$

Với $x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{8}(1)$

Với $y_1.y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(\left(-4m^2 + 16m - 13\right)x_1 + \left(-8m^2 + 31m - 24\right)\right)\left(\left(-4m^2 + 16m - 13\right)x_2 + \left(-8m^2 + 31m - 24\right)\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-4m^2 + 16m - 13\right)^2 x_1.x_2 + \left(-8m^2 + 31m - 24\right)\left(-4m^2 + 16m - 13\right)\left(x_1 + x_2\right) + \left(-8m^2 + 31m - 24\right)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 1 \end{array}\right.(2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có $m < \dfrac{3}{8}$

3. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_{2018}\left(2 - \cos 2x\right)}{x^2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{2018}\left(2-\cos 2x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_{2018}e.\ln\left(2-\cos 2x\right)}{x^2}$$

$$=2\log_{2018}e.\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2\sin^2 x\right)}{2\sin^2 x}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\log_{2018}e$$.

Câu 2. (*4,0 điểm*)

1. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5\pi}{4}-3x\right)-16=-15\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫn nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Lời giải

1. Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=t-\frac{\pi}{4}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\sin\left[\frac{5\pi}{4}-3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]+15\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3t+15\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t+12\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin t-1\right)\left(\sin^2 t+\sin t+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin t=1$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

Do đó ta có: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2. Số phần tử không gian mẫu là: $\left|\Omega\right|=9.10^5$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 15 và có chữ số tận cùng bằng 2 .

Ta nhận thấy rằng: Số nhỏ nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 100009, số lớn nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là 999999.

Ta có $100009+13=100022$, do đó số có 6 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 chính là số 100022.

Nhận thấy rằng nếu hai số tự nhiên có 6 chữ số cùng chia hết cho 13 và đều có chữ số tận cùng bằng 2 thì hiệu của chúng cũng chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 0.

Số nhỏ nhất (lớn hơn 0) có chữ số tận cùng bằng 0 chia hết cho 13 là 130.

Điều này chứng tỏ tất cả các số có 6 chữ số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=100022$, công sai $d=130$.

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vì số cần tìm là số có 6 chữ số không vượt quá 999999 nên ta có:

$100022 + (n-1)130 \le 999999 \Leftrightarrow n \le \dfrac{69239}{10} = 6923,9$.

Vì n là số tự nhiên nên số hạng lớn nhất trong dãy trên ứng với $n = 6923$.

Vậy số phần tử của biến cố B là $|B| = 6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{6923}{900000}$.

Cách 2.

Số phần tử không gian mẫu là: $|\Omega| = 9.10^5$.

Gọi số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2}$.

Ta có: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2} = 10.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} + 2$.

Gọi k là số dư của phép chia $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ cho 13 $\quad (k \in \mathbb{N},\, 0 \le k \le 12)$.

Khi đó vì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2} = 10.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} + 2 \,\vdots\, 13$ $(k \in \mathbb{N},\, 0 \le k \le 12)$ nên ta có:

$10k + 2 \,\vdots\, 13$ $(k \in \mathbb{N},\, 0 \le k \le 12)$

Do đó tồn tại số tự nhiên t sao cho: $10k + 2 = 13t \Leftrightarrow t = \dfrac{10k+2}{13} \in \mathbb{N}$, $(k \in \mathbb{N},\, 0 \le k \le 12)$. Ta có bảng:

$k = 0$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{2}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 1$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{12}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 2$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{22}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 3$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{32}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 4$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{42}{13} = 4 \in \mathbb{N}$	Thỏa mãn
$k = 5$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{52}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại

$k=6$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{62}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=7$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{72}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=8$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{82}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=9$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{92}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=10$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{102}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=11$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{112}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại
$k=12$	$\frac{10k+2}{13}=\frac{122}{13}\notin\mathbb{N}$	Loại

Từ bảng trên ta có $k=4$ là số dư của phép chia $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ cho 13. Như vậy, tồn tại số tự nhiên t để:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=13t+4$. Vì $10000\le\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}\le 99999$ nên $\frac{10000-4}{13}\le k\le\frac{99999-4}{13}$, hay:

$\frac{9996}{13}\approx 768,923\le k\le\frac{99995}{13}\approx 7691,923 \Rightarrow 769\le k\le 7691,\ k\in\mathbb{N}$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 15 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Khi đó số phần tử của biến cố B là $|B|=7691-769+1=6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{6923}{900000}$.

Câu 3 (*3,0 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3(x+5)\sqrt{2+x}=1+3y^2 \quad (1)\\ 2+\sqrt{x^2-2\text{x}+4}+\sqrt{x^2-6\text{x}+12}=y^2\left(3\sqrt{x^2-2\text{x}+4}+5\sqrt{x^2-6\text{x}+12}+8\right)\ (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -2$

Với điều kiện $x\ge -2$, từ $(1)\Rightarrow y>0$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x}\right)^3 + 3\sqrt{2+x} = \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \frac{3}{y} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2+x}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)$ (*) với $f(t) = t^3 + t$

mà $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t$, do đó: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2+x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{x+2}$ (3)

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$(2+x)\left(2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}\right) = 3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2-2x+4}+(x-3)\sqrt{x^2-6x+12}+2x-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2-2x+4}+(x-2)\sqrt{x^2-6x+12}+\left(\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-6x+12}\right)+2(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2-2x+4}+(x-2)\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{4(x-2)}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{4}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \quad (4) \\ \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{4}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2=0 \quad (5) \end{array}\right.$$

+ Xét (4) $\Rightarrow x=2$, thay vào (3) ta được $y = \pm\frac{1}{2}$. Vì $y>0$ nên suy ra $y=\frac{1}{2}$.

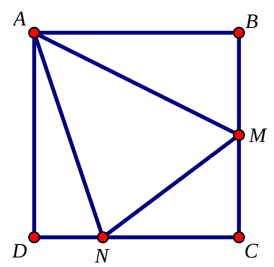
+ Xét (5), ta thấy : $VT(5) > 0 \forall x \geq -2$, do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 4: (*2,0 điểm*)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $M(1;0)$ là trung điểm của cạnh BC, điểm N thuộc cạnh CD sao cho $CN = 2ND$, phương trình đường thẳng AN là: $x-y+2=0$. Tìm tọa độ điểm A biết điểm A có hoành độ dương

Lời giải



Đặt cạnh của hình vuông bằng a

Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}, NM = \frac{5}{6}a, \cos\widehat{MAN} = \frac{AM^2+AN^2-MN^2}{2AM.AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A \in AN \Rightarrow A(x; x+2)$ với $x > 0$

AM, AN có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AM} = (1-x, -x-2), \vec{u} = (1;1)$

$\cos\widehat{MAN} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{|-2x-1|}{\sqrt{(1-x)^2 + (-x-2)^2}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & (N) \\ x = -2 & (L) \end{array}\right.$

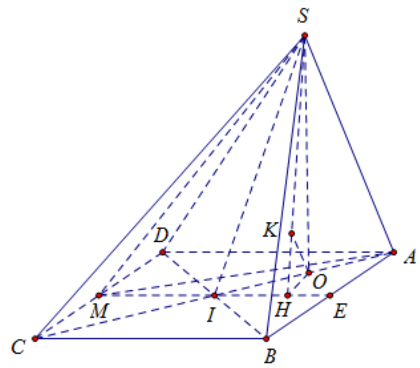
Vậy $A(1;3)$

Câu 5. *(3,0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $SA = a$, $SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm CD.

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC.



$AC \cap BD = I$, ta có $IA = IC = IS$ (là đường cao của các tam giác cân bằng nhau) nên $\triangle SAC$ vuông tại S $\Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2a$ và $SI = IA = IC = \dfrac{1}{2}AC = a$.

$IB = \sqrt{SB^2 - SI^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BD = 2IB = 2a\sqrt{2}$.

$S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2}IC.BD = a^2\sqrt{2}$; Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ là: $R = OC = \dfrac{BC.CD.BD}{4.S_{\triangle BCD}} = \dfrac{3a}{2}$. ($O$ là trung điểm AI)

Do $SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$; $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABCD} = 2.S_{BCD} = 2a^2\sqrt{2}$; $S_{CDM} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCM} = \dfrac{3}{4}S_{ABCD} = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{2}$.

$V_{S.ABCM} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCM} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

2. $IM // BC \Rightarrow BC // (SMI)$ nên $d(BC, SM) = d(BC, (SMI)) = d(C, (SMI))$.

Mà $CI = 2OI \Rightarrow d\left(C,\left(SMI\right)\right) = 2d\left(O,\left(SMI\right)\right)$; $d\left(A,BC\right) = \dfrac{S_{ABCD}}{BC} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

O là trung điểm AI và ME là đường trung bình hình thoi $ABCD$ nên

$d\left(O,ME\right) = \dfrac{1}{4}d\left(A,BC\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. (E là trung điểm AB)

Kẻ $OH \perp ME$, $H \in ME$ thì $OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$; $ME \perp SO \Rightarrow ME \perp \left(SOH\right)$

Kẻ $OK \perp SH$, $K \in SH \Rightarrow OK \perp ME$ vậy $OK \perp \left(SME\right)$ tức là $d\left(O,\left(SME\right)\right) = OK$.

$$OK = \frac{SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)}} = \frac{a\sqrt{66}}{22};\ d\left(C,\left(SMI\right)\right) = 2d\left(O,\left(SMI\right)\right) = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC là $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 6: (*2,0 điểm*) Cho a , b , c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{9}{\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)}} - \dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq -5$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)} = \sqrt{\left(a^2+ac\right)\left(b^2+bc\right)} \overset{\text{Cosi}}{\leq} \dfrac{a^2+ac+b^2+bc}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)} \leq \dfrac{a^2+b^2+c\left(a+b\right)}{2}$ $\left(1\right)$.

Lại có: $c\left(a+b\right) \overset{\text{Cosi}}{\leq} \dfrac{c^2+\left(a+b\right)^2}{2}$ và $\left(a+b\right)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow c\left(a+b\right) \overset{\text{Cosi}}{\leq} \dfrac{c^2+2\left(a^2+b^2\right)}{2}$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right) \Rightarrow \sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)} \leq \dfrac{a^2+b^2+\dfrac{c^2+2\left(a^2+b^2\right)}{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)} \leq \dfrac{4a^2+4b^2+c^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)}} \geq \dfrac{4}{4a^2+4b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)}} \geq \dfrac{36}{4a^2+4b^2+c^2}$.

Do đó $P = \dfrac{9}{\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)}} - \dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}} \geq \dfrac{36}{4a^2+4b^2+c^2} - \dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}$.

Đặt $\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}=t$. Vì a, b, c là các số thực dương nên $t>2$.

$\Rightarrow 4a^2+4b^2+c^2=t^2-4$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{36}{t^2-4}-\dfrac{32}{t}$ với $t>2$.

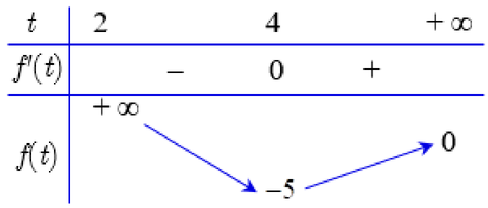
$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-72t}{\left(t^2-4\right)^2}+\frac{32}{t^2}=\frac{-72t^3+32\left(t^4-8t^2+16\right)}{\left(t^2-4\right)^2.t^2}=\frac{32t^4-72t^3-256t^2+512}{\left(t^2-4\right)^2.t^2}$$

$$=\frac{(t-4)\left(32t^3+56t^2-32t-128\right)}{\left(t^2-4\right)^2.t^2}.$$

Ta có $32t^3+56t^2-32t-128=\left(32t^3-128\right)+\left(56t^2-32t\right)=32\left(t^3-4\right)+4t(14t-8)>0$ (vì $t>2$).

Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

Bảng biến thiên :



$$\Rightarrow f(t)\ge -5\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge -5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}=4\\ a=b\\ c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12a^2=12\\ a=b\\ c=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=2\end{cases}$.

Cách 2:

Ta có: $\sqrt{ab(a+c)(b+c)}=\sqrt{(ab+bc)(ab+ac)}\overset{\text{Cosi}}{\le}\dfrac{ab+bc+ab+ac}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)}\le\dfrac{2ab+bc+ac}{2}$.

Đồng thời $\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}=\sqrt{4+\left(2a^2+2b^2\right)+2a^2+\dfrac{c^2}{2}+2b^2+\dfrac{c^2}{2}}$

$\overset{\text{Cosi}}{\ge}\sqrt{4+4ab+2ac+2bc}\Rightarrow\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}\ge\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}$.

Do đó : $\dfrac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge\dfrac{18}{2ab+ac+bc}-\dfrac{32}{\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}}$.

Đặt $\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}=t$. Vì a, b, c là các số thực dương nên $t>2$.

$\Rightarrow 2ab + ac + bc = \dfrac{t^2 - 4}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{36}{t^2 - 4} - \dfrac{32}{t}$ với $t > 2$.

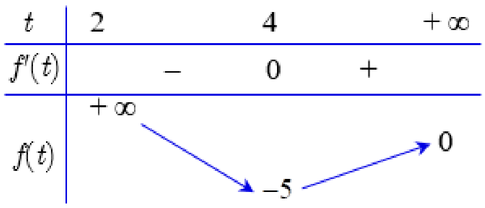
$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-72t}{\left(t^2-4\right)^2} + \frac{32}{t^2} = \frac{-72t^3 + 32\left(t^4 - 8t^2 + 16\right)}{\left(t^2-4\right)^2 .t^2} = \frac{32t^4 - 72t^3 - 256t^2 + 512}{\left(t^2-4\right)^2 .t^2}$$

$$= \frac{(t-4)\left(32t^3 + 56t^2 - 32t - 128\right)}{\left(t^2-4\right)^2 .t^2}.$$

Ta có $32t^3 + 56t^2 - 32t - 128 = \left(32t^3 - 128\right) + \left(56t^2 - 32t\right) = 32\left(t^3 - 4\right) + 4t(14t - 8) > 0$ (vì $t > 2$).

Do đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Bảng biến thiên :



$$\Rightarrow f(t) \geq -5 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} - \frac{32}{\sqrt{4 + 4a^2 + 4b^2 + c^2}} \geq -5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{4 + 2(2ab + ac + bc)} = 4 \\ a = b \\ c = 2a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2 = 12 \\ a = b \\ c = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$.