UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
VÀ THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN THAM DỰ KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút
(Đề thi có 01 trang)

Câu I (5 điểm). Cho các số thực dương a, b. Xét các dãy số $(a_n), (b_n)$ thỏa mãn $a_0 = a, b_0 = b$ và

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2022a_n + b_n},\ b_{n+1} = \frac{1}{2023}a_{n+1}.b_n \quad \forall n \geq 0.$$

1. Chứng minh rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_{n_0} > 2023$.
2. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu II (5 điểm). Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại X, Y. Gọi S, T là các điểm nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{XSY} = \widehat{XTY} = 90^0$.

1. Chứng minh rằng BX, CY là các tiếp tuyến của đường tròn đường kính XY.
2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu III (5 điểm). Xét các số a, b, c nguyên, $c \geq 0$ thỏa mãn $a^n + 2^n$ là ước của $b^n + c$ với mọi n nguyên dương.

1. Chứng minh rằng $c = 0$ hoặc $c = 1$.
2. Khi $c = 1$, chứng minh rằng a và b không đồng thời là các số chính phương.

Câu IV (5 điểm). Với mỗi số tự nhiên $n \geq 4$, ký hiệu a_n là số nhỏ nhất các tập con có 3 phần tử của tập hợp $S_n = \{1;2;3;...;n\}$ sao cho với mọi tập con có 4 phần tử của S_n luôn chứa ít nhất một trong các tập con có 3 phần tử này.

1. Xác định a_6.
2. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $n \geq 4$ thì $a_n \geq \frac{1}{4}C_n^3$.

---HẾT---

Họ và tên thí sinh :..Số báo danh:.......................................

Người coi thi số 1:..Người coi thi số 2:.......................................