SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG THPT LÝ THÁI TỔ

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2017 – 2018
***Môn thi*: Toán – Lớp 12**
***Thời gian làm bài*: 180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 16 tháng 09 năm 2017

Câu I. (*4,0 điểm*)

1) Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$ và M là điểm thuộc $\left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M cắt hai đường tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\left(m-1\right)x^2-\left(m-3\right)x+5m^2+1$ đồng biến trên khoảng $\left(0;3\right)$.

Câu II. (*4,0 điểm*)

1) Tính tổng các nghiệm thuộc $\left[0;2018\pi\right]$ của phương trình:

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3\sqrt{3}\sin x+3\cos x-1$$

2) Tính tổng: $S=C_{2017}^1-2^2C_{2017}^2+3.2^2C_{2017}^3-4.2^3C_{2017}^4+...+2017.2^{2016}C_{2017}^{2017}$.

Câu III. (*4,0 điểm*)

1) Giải bất phương trình: $\log_4\left(x^2-4x+4\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x+2\right)>\log_2\left(4-x\right)$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(17-3x\right)\sqrt{5-x}+\left(3y-14\right)\sqrt{4-y}=0\\ 4\sqrt{2x+8}+(x-y+2)\sqrt[3]{x+3y-5}=2x+14\end{cases}\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Câu IV. (*6,0 điểm*)

1) Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*, có trọng tâm *G*. Gọi *E*, *H* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*; *D* là điểm đối xứng với *H* qua *A*, *I* là giao điểm của đường thẳng *AB* và đường thẳng *CD*. Biết điểm $D\left(-1;-1\right)$, đường thẳng *IG* có phương trình $6x-3y-7=0$ và điểm *E* có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=x$, tất cả các cạnh còn lại bằng 1. Tính thể tích khối chóp đó theo x và tìm x để thể tích đó là lớn nhất.

3) Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh a và hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AHB}=150^0,\widehat{BHC}=120^0,\widehat{CHA}=90^0$. Biết tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB,S.HBC,S.HAC$ bằng $\dfrac{31}{3}\pi a^2$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu V. (*2,0 điểm*) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$ và $a^3b+b^3a+\dfrac{1}{ab}=ab+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{3}{1+2c}$.

--------------**Hết**---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:……………………………………………………; Số báo danh:…………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH
TRƯỜNG THPT LÝ THÁI TỔ

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2017 - 2018
Môn: Toán – Lớp 12

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1.1 (2,0 điểm)		
	Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$ Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-2}{x_0+1}$ Khi đó: $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$ $B(2x_0+1;2)$; $I(-1;1)$	1,0
	*Ta có: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.IB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{\lvert x_0+1\rvert}\cdot 2\lvert x_0+1\rvert=2.3=6$ (đvdt) $S_{IAB}=p.r\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}\Rightarrow r_{\max}\Leftrightarrow p_{\min}$ Chu vi tam giác IAB nhỏ nhất khi IA = IB hay $\dfrac{6}{\lvert x_0+1\rvert}=2\lvert x_0+1\rvert\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\\x_0=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$ *Vậy có 2 điểm thoả mãn $M_1(-1+\sqrt{3};1-\sqrt{3})$ $M_2(-1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$	1,0
1.2 (2,0 điểm)		
	TXĐ: $\mathbb{R}$ $y'=x^2-2(m-1)x-(m-3)$ Do phương trình $y'=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên $\mathbb{R}$, nên để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(0;3)$	1,0
	$\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}\ge m,\ \forall x\in(0;3)$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên khoảng $(0;3)$ $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2};g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2(loai)\end{array}\right.$	0,5
	Từ BBT, $g(x)\ge m,\ \forall x\in(0;3)\Leftrightarrow m\le 2$ Vậy, $m\le 2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$	0,5
2.1 (2 điểm) $2\sin^2x+\sqrt{3}\sin 2x=3\sqrt{3}\sin x+3\cos x-1$. **(1)**		
	(1) $\Leftrightarrow 3\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x=3\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)$	0,5
	$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2=3(\sqrt{3}\sin x+\cos x)$	1,0

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=3(VN)\end{array}\right.$ Giải ra ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{-\pi}{6}+k\pi;k\in Z$	
	Do $x\in\left[0;2018\pi\right]\Rightarrow k\in\left\{1;2;\ldots;2018\right\}\Rightarrow$ .phương trình có 2018 nghiệm. Các nghiệm này lập thành cấp số cộng với $x_1=\dfrac{5\pi}{6},d=\pi\Rightarrow S_{2018}=\dfrac{2018}{2}\left(2.\dfrac{5\pi}{6}+2017\pi\right)=\dfrac{6110504\pi}{3}$	0,5
2.2 (2 điểm).		
	Ta có $\left(1-x\right)^{2017}=C_{2017}^0-C_{2017}^1x+C_{2017}^2x^2-C_{2017}^3x^3+\ldots-C_{2017}^{2017}x^{2017}$ Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $-2017\left(1-x\right)^{2016}=-C_{2017}^1+2C_{2017}^2x-3C_{2017}^3x^2+\ldots-2017C_{2017}^{2017}x^{2016}$	1,0
	$x=2\Rightarrow -2017=-C_{2017}^1+2C_{2017}^2 2-3C_{2017}^3 2^2+\ldots-2017C_{2017}^{2017}2^{2016}$ Vậy S =2017	1,0
3.1 (2 điểm)		
	$+ĐK:\begin{cases}x^2-4x+4>0\\ x+2>0\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 2\\ -2<x<4\end{cases}$	0,5
	+ Bất phương trình đã cho tương đương với $\log_{2^2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x+2)>\log_2(4-x)$ $\Leftrightarrow \log_2\left\|x-2\right\|+\log_2(x+2)>\log_2(4-x)$ $\Leftrightarrow \log_2\left(\left\|x-2\right\|(x+2)\right)>\log_2(4-x)$ $\Leftrightarrow \left\|x-2\right\|(x+2)>4-x$ (1)	0,5
	+) TH1: Với $x\in(-2;2)$ thì (1) $\Leftrightarrow(2-x)(x+2)>4-x\Leftrightarrow x\in(0;1)$. Kết hợp với ĐK trong trường hợp này ta được $x\in(0;1)$ +) TH2: Với $x\in(2;4)$ thì (1) $\Leftrightarrow(x-2)(x+2)>4-x\Leftrightarrow x\in(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2})\cup(\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2};+\infty)$. Kết hợp với ĐK trong trường hợp này ta được $x\in(\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2};4)$ * Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $x\in(0;1)\cup(\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2};4)$	1,0
3.1 (2 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(17-3x\right)\sqrt{5-x}+\left(3y-14\right)\sqrt{4-y}=0\\ 4\sqrt{2x+8}+(x-y+2)\sqrt[3]{x+3y-5}=2x+14\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$		
	Điều kiện $\begin{cases}-4\le x\le 5\\ y\le 4\end{cases}$	0,5
	Phương trình (1) tương đương với $\left(3(5-x)+2\right)\sqrt{5-x}=\left(3(4-y)+2\right)\sqrt{4-y}$ (3)	0,5

Xét hàm $f(t)=(3t+2)\sqrt{t}$ với $t\ge 0$, ta có $f'(t)=3\sqrt{t}+\dfrac{3t+2}{2\sqrt{t}}>0;\forall t\ge 0$. ra suy ra f(t) đbiến trên $\left[0;+\infty\right)$ Kết hợp với (3) ta có $f(5-x)=f(4-x)\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình (2) của hệ ta được

$$4\sqrt{2x+8}+3\sqrt[3]{4x-8}-2x-14=0$$

$$\Leftrightarrow\left[4\sqrt{2x+8}-\left(x+12\right)\right]+\left[3\sqrt[3]{4x-8}-(x+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-4)^2}{4\sqrt{2x+8}+x+12}+\frac{(x-4)^2(x+14)}{9\sqrt[3]{(4x-8)^2}+3(x+2)\sqrt[3]{4x-8}+(x+2)^2}=0$$

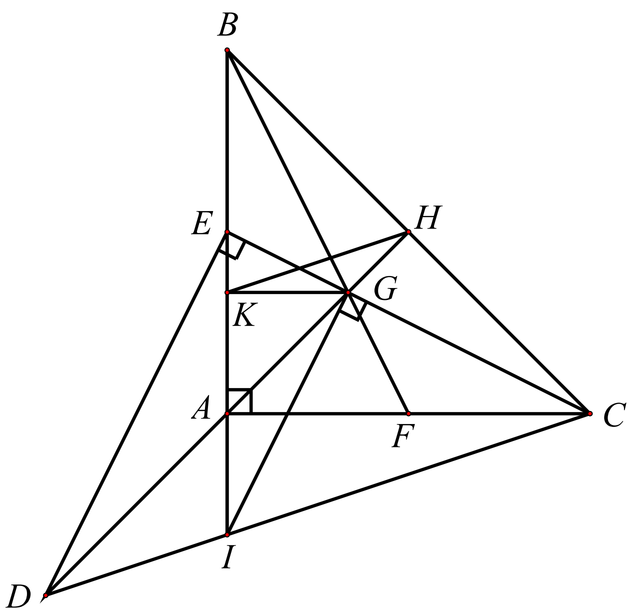
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4(tm)\Rightarrow y=3(tm)\\ \dfrac{1}{4\sqrt{2x+8}+x+12}+\dfrac{(x+14)}{9\sqrt[3]{(4x-8)^2}+3(x+2)\sqrt[3]{4x-8}+(x+2)^2}=0(4)\end{array}\right.$$

Nhận xét: Với $x\ge -4$,vế trái của phương trình (4) luôn dương , nên (4) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm (4;3)

1,0

4.1 (2 điểm)



Gọi K là trung điểm của BI, suy ra $HK//CD\Rightarrow A$ là trung điểm của $KI, HK=DI=\dfrac{1}{2}IC$;

$AK=\dfrac{1}{2}BK\Rightarrow GK//AC\Rightarrow GK\perp AB\Rightarrow GB=GI=GC$ hay G là tâm đường tròn đi qua ba điểm C, I, B.

$\widehat{CGI}=2\widehat{IBC}=90^o$, $ID=\dfrac{1}{2}IC\Rightarrow DE//IG$.

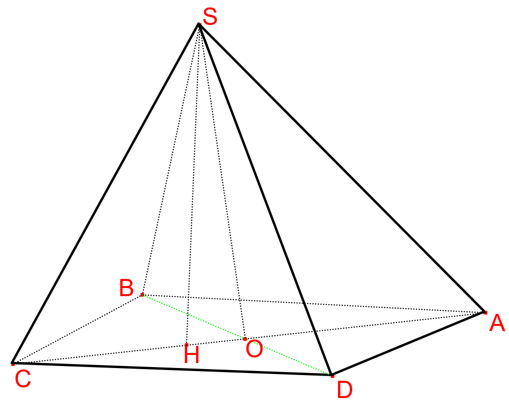
0,5

Phương trình đường thẳng DE: $2x-y+1=0\Rightarrow E\left(1;3\right)$

$CE\perp IG$, suy ra phương trình $CE: x+2y-7=0$. Tọa độ của G là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+2y-7=0\\6x-3y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)\Rightarrow C\left(5;1\right)$$

1,0

	$\overrightarrow{DG}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AG}\Rightarrow A(1;1)\Rightarrow B(1;5)$. Vậy, $A(1;1),B(1;5)$ và $C(5;1)$.	0,5
4.2 (2 điểm)		
	 Gọi H là hình chiếu của S trên (ABCD) Do SB = SC = SD nên HB = HC = HD, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.	0,5
	Mặt khác, tam giác BCD cân tại C nên H thuộc CO, với O là giao của AC và BD. Lại có, $\Delta CBD=\Delta ABD=\Delta SBD\Rightarrow OC=OA=\mathrm{OS}$ nên ΔSAC vuông tại S $\Rightarrow AC=\sqrt{x^2+1}$ Ta có, $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SC^2}\Rightarrow SH=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ABCD là hình thoi $\Rightarrow AC\perp BD\Rightarrow OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$	0,5
	+ $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-x^2}\Rightarrow V=\frac{1}{6}x\sqrt{3-x^2}$ + Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có, $V=\frac{1}{6}x\sqrt{3-x^2}\le\frac{1}{6}.\frac{x^2+3-x^2}{2}=\frac{1}{4}$ V có giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$ khi $x=\sqrt{3-x^2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$	1,0
3.1 (2 điểm)		
	Gọi r_1,r_2,r_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta HAB,\Delta HBC,\Delta HAC$ Khi đó $r_1=\frac{a}{2\sin 150^0}=a;r_2=\frac{a}{2\sin 120^0}=\frac{a}{\sqrt{3}},r_3=\frac{a}{2sin90^0}=\frac{a}{2}$	0,5
	Gọi R_1,R_2,R_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB,S.HBC,S.HAC$ Đặt $SH=2x\Rightarrow R_1=\sqrt{x^2+a^2},R_2=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{3}},R_3=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$	0,5
	Ta có $S=4\pi R_1^2+4\pi R_2^2+4\pi R_3^2=\frac{31}{3}\pi a^2\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ Vậy thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3}{6}$	1,0
5 (2 điểm) Cho a,b,c là các số thực dương và a.b.c=1, thỏa mãn: $a^3b+b^3a+\frac{1}{ab}=ab+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{3}{1+2c}$		

	Theo BĐT Cô–si ta có: $a^3b+ab^3\ge 2a^2b^2 \Rightarrow ab+2\ge 2a^2b^2+\dfrac{1}{ab}$ Đặt t=a.b>0 $\Rightarrow t+2\ge 2t^2+\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3-t^2-2t+1\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le t\le 1$	0,5
	Với $a,b>0; ab\le 1$ ta chứng minh $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{2}{1+ab}$ (*) Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow (\dfrac{1}{1+a^2}-\dfrac{1}{1+ab})+(\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{1}{1+ab})\le 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)}+\dfrac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)}\le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1)\le 0$ (đúng) $\Rightarrow P\le \dfrac{2}{1+ab}-\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{ab}}=\dfrac{2}{1+t}-\dfrac{3t}{t+2}$	0,5
	Xét $t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$; $f(t)=\dfrac{2}{1+t}-\dfrac{3t}{t+2}$; $f'(t)=-\dfrac{2}{(1+t)^2}-\dfrac{6}{(t+2)^2}<0$ Từ đó $f(t)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]\Rightarrow Max\ f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{15}$ Dấu "=" xảy ra khi $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; c=2$	1,0

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
2. Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
3. Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm