

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (6 điểm)

- a. Giải phương trình: $(1 + \cos x) \sin x + 3 \cos x + 1 = 2(\sin x + 3) \cos^4 \frac{x}{2}$.
- b. Cho n là số tự nhiên lẻ ($n \geq 3$). Chứng minh $\left(C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \right)$ là một số lẻ.

Bài 2. (4 điểm)

- a. Tính: $\lim(n + \sin 2020n)$.
- b. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2020} - 2020x + 2019}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Bài 3. (3 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n + 4n^3 - 3n^2 - 3n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- a. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số.
- b. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $2020 \sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p .

Bài 4. (3 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) chứa BC và cắt các cạnh SA, SD lần lượt tại M, N . Góc giữa đường thẳng AC và (P) bằng 30° . Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Bài 5. (2 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < BC < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường tròn tâm O' lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, AC tại D, E và tiếp xúc trong với đường tròn $(O; R)$ tại T . Đường thẳng TD cắt đường tròn $(O; R)$ tại K ($K \neq T$). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh $KC = KB$ và ba điểm D, I, E thẳng hàng.

Bài 6. (2 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; \dots; 3^n\}$. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ luôn tồn tại tập con M của tập hợp X sao cho tập con M có 2^n phần tử và không có ba phần tử nào lập thành một cấp số cộng.

----- HẾT -----