Người giải đề: N.V.Sơn. DĐ: 01202626549

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI THỪA THIÊN HUẾ
NĂM HỌC 2017 - 2018. *(Lời giải gồm 07 trang)*

Câu 1: ***(4,0 điểm)*** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{mx+1}, \quad (H_m)$.

a) Khi $m=1$, hàm số đã cho có đồ thị (H_1) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

b) Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$ thì đồ thị hàm số (H_m) cắt đường thẳng $(d): y=2x-2m$ tại hai điểm phân biệt C, D thuộc một đường (H) cố định. Đường thẳng (d) cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N. Tìm m để $S_{OCD}=3S_{OMN}$.

Hướng dẫn giải:

a) Khi $m=1$, hàm số đã cho trở thành: $y=\dfrac{2x-1}{x+1} \quad (H_1)$.

Gọi $\begin{cases} A=(H_1)\cap Ox \\ B=(H_1)\cap Oy \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2};0\right),\ B(0;-1) \Rightarrow OA=\dfrac{1}{2};\ OB=1.$

Tam giác OAB vuông tại O nên: $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.1=\dfrac{1}{4}$ (đvdt).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (H_m) và (d) là:

$$\frac{2x-m}{mx+1}=2x-2m \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1\neq 0 \\ 2x-m=(2x-2m)(mx+1) \end{cases} \qquad (I)$$

Với $m\neq 0$ thì $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{1}{m} \\ 2mx^2-2m^2x-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{1}{m} \\ 2x^2-2mx-1=0 \quad (*) \end{cases}$.

Phương trình (*) có $\Delta'=m^2+2>0,\ \forall m\neq 0$ và: $2.\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2-2m.\left(-\dfrac{1}{m}\right)-1=\dfrac{2}{m^2}+1>0,\ \forall m\neq 0$

Suy ra $\forall m\neq 0$ phương trình (*) luôn có 2 nghiệm thực phân biệt đều khác $-\dfrac{1}{m}$.

Vậy $\forall m\neq 0$ thì (H_m) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

*Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*), theo định lí Vi-ét thì: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2x_1}$.

Gọi $C(x_1;y_1), D(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm của (H_m) và (d).

Ta có: $y_1=2x_1-2m=2x_1-2(x_1+x_2)=-2x_2=-2.\left(-\dfrac{1}{2x_1}\right)=\dfrac{1}{x_1}$.

Tương tự $y_2=\dfrac{1}{x_2}$. Vậy hai điểm C, D nằm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}\ (H)$. (ĐPCM)

*Ta có: $\begin{cases} M=(d)\cap Ox \\ N=(d)\cap Oy \end{cases} \Rightarrow M(m;0),\ N(0;-2m) \Rightarrow OM=|m|;\ ON=|-2m|=2|m|.$

Khi đó $S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{1}{2}|m|.2|m|=m^2.$

Ta có $OC.OD=\sqrt{\left(x_1^2+\frac{1}{x_1^2}\right)\left(x_2^2+\frac{1}{x_2^2}\right)}=\sqrt{\frac{(x_1^4+1)(x_2^4+1)}{x_1^2x_2^2}}=\sqrt{\frac{(x_1x_2)^4+1+x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^2}}$

- $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2(x_1x_2)^2=(m^2+1)^2-\frac{1}{2}=m^4+2m^2+\frac{1}{2}.$

Vậy $OC.OD=\sqrt{\frac{\frac{1}{16}+1+m^4+2m^2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}}=\sqrt{4m^4+8m^2+\frac{25}{4}}.$

Ta có $S_{OCD}=3S_{OMN}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4m^4+8m^2+\frac{25}{4}}=3m^2$

$\Leftrightarrow 128m^4-32m^2-25=0 \Leftrightarrow m^2=\frac{2+3\sqrt{6}}{16} \Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2+3\sqrt{6}}}{4}.$

Câu 2: ***(4,0 điểm)***

a) Giải phương trình sau: $\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

b) Giải phương trình sau: $5\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)=x^2\left(4x^2-25x+18\right),\ \forall x\ge 0.$

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện $\begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ne 0 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\ne 0 \\ -\cos x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z}).$

Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}(\cos x+\sin x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\sin x=0 \\ 2\sqrt{2}\sin x\cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Đối chiếu với ĐK ta được phương trình có 3 họ nghiệm là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$; $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$

b) **Cách 1:** **Đưa về hàm đặc trưng.**

Phương trình (1) tương đương với:

$$5+5\sqrt{1+x^3}=4x^4-25x^3+18x^2$$
$$\Leftrightarrow 25\left(1+x^3\right)+5\sqrt{1+x^3}=4x^4+18x^2+20$$
$$\Leftrightarrow 25\left(1+x^3\right)+5\sqrt{1+x^3}=\left(2x^2+4\right)^2+\left(2x^2+4\right) \quad (*)$$

*Đặt $\begin{cases} a=5\sqrt{1+x^3}>0 \\ b=2x^2+4>0 \end{cases}$ khi đó PT(*) trở thành:

$$a^2+a=b^2+b \Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)=0 \Leftrightarrow a=b.$$

*Với $a=b$ ta có: $5\sqrt{1+x^3}=2x^2+4 \Leftrightarrow 5\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}=2(1+x)+2(1-x+x^2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x}=2\sqrt{1-x+x^2} \\ 2\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x+x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{37}}{2} \ \left(x>0\right).$$

Cách 2: **Nhân liên hợp.**

$$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{1+x^3}-10(1+x)=4x^4-25x^3+18x^2-5-10(1+x)$$
$$\Leftrightarrow 5\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1-x+x^2}-2\sqrt{1+x}\right)=4x^4-25x^3+18x^2-10x-15$$
$$\Leftrightarrow 5\sqrt{1+x}.\frac{\left(x^2-5x-3\right)}{\sqrt{1-x+x^2}+2\sqrt{1+x}}=\left(x^2-5x-3\right)\left(4x^2-5x+5\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \\ \dfrac{5\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x+x^2}+2\sqrt{1+x}}=4x^2-5x+5 \qquad (**) \end{array}\right.$$

Ta có: $(**) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x+x^2}}{2\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x+x^2}}=4x^2-5x+3$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(4x^2-5x+3\right)}{\left(2\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x+x^2}\right)}=4x^2-5x+3$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0 \quad (VN)$$

Câu 3: ***(4,0 điểm)***

a) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+x-4y+2=0 & (1) \\ x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+y & (2) \end{cases} \quad \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

b) Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 tới 30. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác xuất để tổng số ghi trên 3 thẻ chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện $x\ge -2;\ y\in\mathbb{R}.$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3+x=y^3-3y^2+4y-2 \Leftrightarrow x^3+x=\left(y-1\right)^3+\left(y-1\right)$

$$\Leftrightarrow x^3-(y-1)^3+(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left[x^2+x(y-1)+(y-1)^2+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow y=x+1.$$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta có: $x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+x+1$

$$\Leftrightarrow x^3-4=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^3-8=2\sqrt{x+2}-4 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=\frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+2x+4=\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}} \quad (*) \end{array}\right.$$

Với mọi $x\ge -2$ ta có $VT(*)=(x+1)^2+3\ge 3;\quad VP(*)=\dfrac{2}{2+\sqrt{x+2}}\le 1$ nên PT(*) vô nghiệm.

Với $x=2\Rightarrow y=3$. Vậy hệ đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y)=(2;3)$.

b) Gọi A là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ mang các số có tổng chia hết cho 3".

Ta có $n(\Omega)=C_{30}^3$.

*Ta chia 30 thẻ được đánh số từ 1 tới 30 làm 3 loại sau:
Loại 1: 10 thẻ mang số chia cho 3 dư 1;
Loại 2: 10 thẻ mang số chia cho 3 dư 2;
Loại 3: 10 thẻ mang số chia hết cho 3;
*Rút 3 thẻ mang số có tổng chia hết cho 3 xảy ra các trường hợp sau:

TH1: 3 thẻ đó đều là thẻ loại 1 có: C_{10}^3 cách

TH2: 3 thẻ đó đều là thẻ loại 2 có: C_{10}^3 cách

TH3: 3 thẻ đó đều là thẻ loại 3 có: C_{10}^3 cách

TH4: 3 thẻ đó gồm 1 thẻ loại 1; 1 thẻ loại 2 và 1 thẻ loại 3 thì có: $10.10.10=1000$ cách.

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3C_{10}^3+1000}{C_{30}^3}=\dfrac{68}{203}$.

Câu 4: ***(3,0 điểm)***

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$ và điểm $M(6;2)$.

a) Chứng minh điểm M nằm ngoài đường tròn (C).

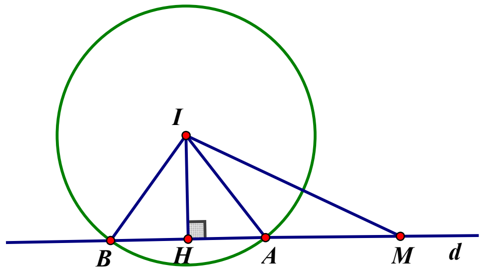
b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho $MA^2+MB^2=50$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(5;0)\Rightarrow IM=5>\sqrt{5}=R$. Vậy điểm M nằm ngoài đường tròn (C).

b) Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $IH\perp AB$.



- $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right)^2 = 2MH^2 + HA^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{MH}.\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}\right)$

$$= 2MH^2 + 2HA^2 = 2\left(IM^2 - IH^2\right) + 2\left(IA^2 - IH^2\right)$$
$$= 2IM^2 + 2IA^2 - 4IH^2$$
$$= 50 + 10 - 4IH^2 = 60 - 4IH^2$$

Ta có $MA^2 + MB^2 = 50 \Leftrightarrow 60 - 4IH^2 = 50 \Leftrightarrow IH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Gọi $\vec{n} = (a;b)\ \ \left(a^2 + b^2 > 0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d cần tìm.

Phương trinh tổng quát đường thẳng d là: $a(x-6) + b(y-2) = 0$.

Ta có $IH = d(I;d) = \dfrac{|-5a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow b^2 = 9a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3a \\ b = -3a \end{array}\right.$

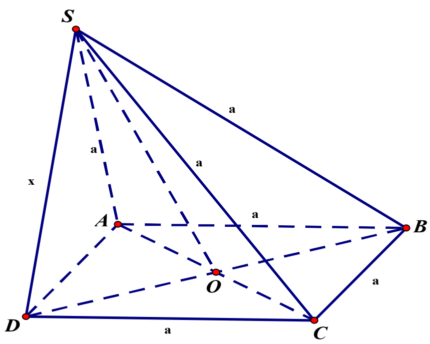
*Với $b = 3a$ thì phương trình d là: $(x-6) + 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 12 = 0$

*Với $b = -3a$ thì phương trình d là: $(x-6) - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y = 0$

Câu 5: ***(3,0 điểm)***
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SC = a$ và $SD = x\ \ (a > 0;\ x > 0)$

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và x.
b) Tính x theo a để thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



a) Gọi $O = AC \cap BD$.
*Tam giác SAC cân tại S có SO là trung tuyến nên: $SO \perp AC$ (1)

* $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AC \perp (SBD)$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = V_{A.SBD} + V_{C.SBD} = \frac{1}{3}AO.S_{SBD} + \frac{1}{3}CO.S_{SBD} = \frac{1}{3}AC.S_{SBD}$.

*Xét 3 tam giác vuông OAD, OAB, OAS có cạnh OA chung và $AD = AB = AS$ nên chúng bằng nhau. Suy ra: $OD = OB = OS \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.

Khi đó: $S_{SBD} = \frac{1}{2}SB.SD = \frac{1}{2}ax$ và $BD = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Ta có: $AC = 2AO = 2\sqrt{AD^2 - DO^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}xa.\sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{1}{6}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

b) Theo bất đẳng thức Cô-si thì: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{x^2 + \left(3a^2 - x^2\right)}{2} = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow V_{S.ABCD} \le \frac{1}{6}a.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi: $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6: ***(2,0 điểm)***

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x, y \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^5y + xy^5 + \frac{6}{x^2+y^2} - 3(x+y).$$

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Ta có $x, y \le 1$ nên: $(x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge x + y - 1$

Khi đó $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \le (x+y)^2 - 2(x+y-1) = (x+y)^2 - 2(x+y) + 2$ (1)

Và: $x^5y + xy^5 = xy\left(x^4 + y^4\right) \ge xy.\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 \ge \frac{1}{8}xy(x+y)^4 \ge \frac{1}{8}(x+y-1)(x+y)^4$ (2)

Từ các đánh giá (1) và (2) nên ta có:

$$P \ge \frac{1}{8}(x+y-1)(x+y)^4 + \frac{6}{(x+y)^2 - 2(x+y) + 2} - 3(x+y).$$

Đặt $t = x + y$. Do $x, y \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $t \in [1;2]$.

Ta có $P \ge f(t) = \frac{1}{8}(t-1)t^4 - 3t + \frac{6}{t^2 - 2t + 2}$

Xét hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;2]$ có:

$$f'(t)=\frac{1}{8}\left(5t^4-4t^3\right)-3-\frac{12(t-1)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}=\frac{5t^4-4t^3-24}{8}-\frac{12(t-1)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}$$

$$=\frac{5t^3(t-2)+6t^3-24}{8}-\frac{12(t-1)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}=\frac{5t^3(t-2)+6\left(t^3-8\right)}{8}+3-\frac{12(t-1)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}$$

$$=\frac{(t-2)\left(5t^3+6t^2+12t+24\right)}{8}+3-\frac{12(t-1)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2}$$

Ta có $(t-1)^2+1\ge 2(t-1)\Rightarrow\left[(t-1)^2+1\right]^2\ge 4(t-1)^2\Leftrightarrow\dfrac{12(t-1)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2}\le\dfrac{3}{t-1}\le 3$ $\quad$ $(do\ t\ge 2)$

Suy ra: $3-\dfrac{12(t-1)}{\left[(t-1)^2+1\right]^2}\le 0,\quad \forall t\in[1;2]$.

Vậy $f'(t)\le 0,\ \forall t\in[1;2]$. Nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Do đó $f(t)\ge f(2)=-1$.

Vậy $P\ge -1$.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng -1 đạt được khi và chỉ khi $x=y=1$.

----- Hết ------

(Lời giải được thực hiện trong thời gian ngắn nên không tránh khỏi sai sót, nếu có sai sót gì xin bạn đọc bỏ qua)