UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2018
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: **180 phút** *(không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho dãy số $\left(x_n\right)$ xác định bởi: $x_0 = 2017; x_n = -\frac{2017}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \left(n \geq 1\right)$. Tìm giới hạn:

$$L = \lim \frac{n^2.\sum_{k=0}^{2017} 2^k x_k + 5}{-2018n^2 + 4n - 3}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB. Đường tròn đường kính AH và đường tròn (O) cắt nhau tại $T \neq A$. AT cắt BC tại Q. NP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại R.

a) Chứng minh rằng QR vuông góc OH.

b) Đường thẳng đối xứng với HM qua phân giác trong góc $\widehat{BHC}$ cắt đoạn thẳng BC tại I. Gọi K là hình chiếu của A trên HI. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIK tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 4. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị tự nhiên của n để biểu thức $A = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ có giá trị nguyên.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho S là tập gồm 2017 số nguyên tố phân biệt và M là tập gồm 2018 số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số trong M đều không là số chính phương và chỉ có ước nguyên tố thuộc S. Chứng minh rằng có thể chọn ra trong M một số số có tích là một số chính phương.

b) Có 32 học sinh tham gia 33 câu lạc bộ, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ và mỗi câu lạc bộ có đúng 3 học sinh tham gia. Biết rằng không có 2 câu lạc bộ nào có 3 học sinh giống nhau. Chứng minh rằng có 2 câu lạc bộ chung nhau đúng 1 học sinh.

------------ Hết ------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

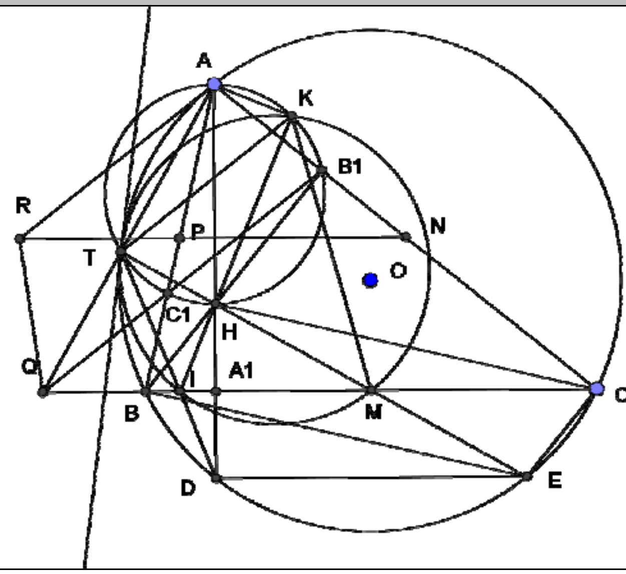
Họ và tên thí sinh:..Số báo danh :…………...

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2018
Môn thi: **Toán**

Câu	Đáp án	Điểm
1	Cho dãy số $\left(x_n\right)$ xác định bởi: $x_0=2017; x_n=-\dfrac{2017}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}x_k\left(n\geq 1\right)$. Tìm giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2.\sum\limits_{k=0}^{2017}2^kx_k+5}{-2018n^2+4n-3}$.	***4,0***
	*) Tính $S=\sum\limits_{k=0}^{2017}2^kx_k$ Ta có $kx_k=-2017\sum\limits_{i=0}^{k-1}x_i;\ (k-1)x_{k-1}=-2017\sum\limits_{i=0}^{k-2}x_i$ $\Rightarrow kx_k-(k-1)x_{k-1}=-2017x_{k-1}\Rightarrow x_k=-\dfrac{2017-k+1}{k}x_{k-1}\ (\forall k\geq 1)\ (*)$	1,0
	Từ (*) suy ra $x_{k-1}=-\dfrac{2017-k+2}{k-1}x_{k-2}$ $\ldots$ $x_2=-\dfrac{2017-1}{2}x_1$ $x_1=-\dfrac{2017-0}{1}x_0$ $\Rightarrow x_k=\left(-1\right)^k\left[\dfrac{2017-\left(k-1\right)}{k}\right]\left[\dfrac{2017-\left(k-2\right)}{k-1}\right]\ldots\left[\dfrac{2017-0}{1}\right]x_0$ $=\left(-1\right)^k\dfrac{2017!}{k!\left(2017-k\right)!}.2017=\left(-1\right)^k2017.C_{2017}^k\left(\forall k\geq 1\right)$ $\Rightarrow S=2017\sum\limits_{k=0}^{2017}2^k\left(-1\right)^kC_{2017}^k=2017\sum\limits_{k=0}^{2017}\left(-2\right)^kC_{2017}^k=2017\left(1-2\right)^{2017}=-2017$	2,0
	*) Do đó: $L=\lim\dfrac{-2017n^2+5}{-2018n^2+4n-3}=\dfrac{2017}{2018}$.	1,0

2	Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $xf(x+xy)=xf(x)+f(x^2)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$	***4,0***
	Trong (1) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0.$ Trong (1) cho $y=-1$ ta có $xf(x)+f(x^2)f(-1)=xf(0)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$ (2) Trong (2) cho $x=-1$ ta có $f(1)f(-1)-f(-1)=0\Rightarrow f(-1)=0$ hoặc $f(1)=1.$	0,5
	- Nếu $f(-1)=0$ thì từ (2) ta suy ra $xf(x)=0\,\forall x\in\mathbb{R}$ từ đó suy ra $f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbb{R}.$	0,5
	- Nếu $f(1)=1$, trong (2) cho $x=1$ ta thu được $f(-1)=-1.$ Từ đó (2) trở thành $f(x^2)=xf(x),\forall x\in\mathbb{R}.$ (3) Trong (1) ta cho $y=1$ ta có $xf(2x)=xf(x)+f(x^2)f(1),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(2x)=2f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$	0,5
	Từ (1) và (3) ta được $f(x+xy)=f(x)+f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$ (4) Trong (4) lấy $x=1$ ta có $f(1+y)=1+f(y),\forall y\in\mathbb{R}.$ Trong (4) lấy $x=-1$ ta có $f(-1-y)=-1-f(y),\forall y\in\mathbb{R}.$ Do đó $f(-1-y)=-f(1+y)\,\forall y\in\mathbb{R}$ hay f là hàm số lẻ. Trong (4) thay y bởi $-y$ và sử dụng tính lẻ của hàm số ta có $f(x-xy)=f(x)+f(x)f(-y)=f(x)-f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (5) Cộng theo vế (4), (5) ta có $f(x+xy)+f(x-xy)=2f(x)=f(2x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$ Hay $f(a+b)=f(a)+f(b)\,\forall a,b\in\mathbb{R}$ (6). Thật vậy: (6) hiển nhiên đúng với $a+b=0.$ Với mọi a,b mà $a+b\neq 0$ ta có hệ $\begin{cases}x+xy=a\\x-xy=b\end{cases}$ có nghiệm là $\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2}\\y=\dfrac{a-b}{a+b}\end{cases}$, từ đó $f(a)+f(b)=f(a+b)$. Do đó (6) đúng. Ta có $f((x+1)^2)=(x+1)f(x+1)=(x+1)(f(x)+1)$ Và $f((x+1)^2)=f(x^2+2x+1)=f(x^2)+f(2x)+f(1)=xf(x)+2f(x)+1.$ Từ hai điều trên ta có $xf(x)+2f(x)+1=(x+1)f(x)+x+1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x\,\forall x\in\mathbb{R}.$	2,0
	Thử lại ta có $f(x)=0\,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x\,\forall x\in\mathbb{R}$ là tất cả các hàm số cần tìm.	0,5

3	Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB. Đường tròn đường kính AH và đường tròn (O) cắt nhau tại $T \neq A$. AT cắt BC tại Q. NP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại R. ***a/*** Chứng minh rằng QR vuông góc OH. ***b/*** Đường thẳng đối xứng với HM qua phân giác trong góc $\widehat{BHC}$ cắt đoạn thẳng BC tại I. Gọi K là hình chiếu của A trên HI. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MIK tiếp xúc với đường tròn (O).	***5,0***
	a/ Gọi A_1, B_1, C_1 là chân đường vuông góc kẻ từ *A, B, C* của tam giác *ABC*. Khi đó *AT, BC,* B_1C_1 đồng quy tại *Q* (do tính chất tâm đẳng phương của ba đường tròn $(O),(AH),(BC)$. (kí hiệu $(AH),(BC)$ là đường tròn đường kính *AH, BC*)  	1,0
	Ta có $RA^2 = RP.RN$ và $QT.QA = QB_1.QC_1$ do đó R, Q có cùng phương tích đối với đường tròn (*O*) và đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm qua *P, N,* B_1, C_1).	1,0
	Ta đã biết tâm đường tròn Euler là trung điểm *OH* nên $RQ \perp OH$.	1,0
	b/ Ta chứng minh bài toán trong trường hợp như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự. Gọi *AH* cắt (*O*) tại *D* khác *A*, *AE* là đường kính của (*O*). Trước tiên ta có *H* và *D* đối xứng nhau qua *BC* và tứ giác *HBEC* là hình bình hành đồng thời các điểm *T, H, M, E* thẳng hàng. Ta có $\widehat{HIA_1} = \widehat{HAK} = \widehat{KTH} = \widehat{KTM}$ do đó *T, I, M, K* cùng thuộc một đường tròn. Ta chứng minh *T, I, D* thẳng hàng. Thật vậy gọi *TD* cắt *BC* tại *J*. Khi đó do tính đối xứng thì $\widehat{BHJ} = \widehat{BDJ} = \widehat{BDT} = \widehat{BET} = \widehat{BEH} = \widehat{EHC}$, do đó *J* trùng với *I*. Gọi *Tx* là tiếp tuyến tại *T* của (*O*). Khi đó $\widehat{xTD} = \widehat{TED} = \widehat{TMI}$ do đó *Tx* cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *TMI* hay *Tx* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *MIK*. Hay *Tx* là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (*O*) và đường tròn ngoại t iếp tam giác *MIK*, ta có điều phải chứng minh.	2,0

4	Tìm tất cả các giá trị tự nhiên của n để biểu thức $A=\dfrac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ có giá trị nguyên.	***3,0***
	Rõ ràng $n=0,1,2,3$ không thỏa mãn. Xét $n\geq 4$, với p là số nguyên tố bất kì, ta có $v_p((3n)!)=\sum\left[\dfrac{3n}{p^k}\right]$; $v_p(n!(n+1)!(n+2)!)=\sum\limits_k(\left[\dfrac{n}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n+1}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n+2}{p^k}\right])$	0,5
	+) Để ý rằng, với mỗi $m\geq 3$ ta đều có $\left[\dfrac{3n}{m}\right]\geq\left[\dfrac{n}{m}\right]+\left[\dfrac{n+1}{m}\right]+\left[\dfrac{n+2}{m}\right]$ (1) . Thật vậy: Đặt $n=mk+r$ với k,r là thương và dư trong phép chia n cho m. Khi đó * Nếu $r\leq m-3$ thì VP(1)$=3k$ và VT(1)=$\left[3k+\dfrac{3r}{m}\right]=3k+\left[\dfrac{3r}{m}\right]$ * Nếu $r=m-2$ thì VP(1)$=3k+1$ và VT(1)=$\left[3k+\dfrac{3m-6}{m}\right]=3k+1+\left[\dfrac{2m-6}{m}\right]$ * Nếu $r=m-1$ thì VP(1) $=3k+2$ và VT(1)=$\left[3k+\dfrac{3m-3}{m}\right]=3k+2+\left[\dfrac{m-3}{m}\right]$ Do $m\geq 3$ nên mỗi trường hợp trên đều cho ta VT(1)$\geq$ VP(1). Như vậy với mỗi số nguyên tố p>2 và với mỗi số $k\geq 1$ ta đều có $\left[\dfrac{3n}{p^k}\right]\geq\left[\dfrac{n}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n+1}{p^k}\right]+\left[\dfrac{n+2}{p^k}\right]$ Với $p=2$ và $k\geq 2$ ta cũng có $\left[\dfrac{3n}{2^k}\right]\geq\left[\dfrac{n}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n+2}{2^k}\right]$	1,5
	+) Xét riêng với $p=2$, dễ thấy $\left[\dfrac{3n}{2}\right]+1=\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ Lại gọi k_0 là số tự nhiên lớn nhất mà $\left[\dfrac{n+2}{2^{k_0}}\right]$ khác 0. Nói cách khác, ta có $2^{k_0}\leq n+2<2^{k_0+1}$. Khi đó $3n=2(n+2)+n-4\geq 2^{k_0+1}$ do $n\geq 4$. Vậy nên ta có $\sum\limits_{k>k_0}\left[\dfrac{3n}{2^k}\right]\geq 1$ còn $\sum\limits_{k>k_0}\left(\left[\dfrac{n}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n+1}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n+2}{2^k}\right]\right)$ =0. Tóm lại ta có $v_p((3n)!)\geq v_p(n!(n+1)!(n+2)!)$ với mọi số nguyên tố p và mọi $n\geq 4$. Vậy tất cả số tự nhiên n cần tìm là $n\geq 4$	1,0

5	***a/*** Cho S là tập gồm 2017 số nguyên tố phân biệt và M là tập gồm 2018 số tự nhiên phân biệt sao cho mỗi số trong M đều không là số chính phương và chỉ có ước nguyên tố thuộc S. Chứng minh rằng có thể chọn ra trong M một số số có tích là một số chính phương. ***b/*** Có 32 học sinh tham gia 33 câu lạc bộ, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ và mỗi câu lạc bộ có đúng 3 học sinh tham gia. Biết rằng không có 2 câu lạc bộ nào có 3 học sinh giống nhau. Chứng minh rằng có 2 câu lạc bộ chung nhau đúng 1 học sinh.	***4,0***
	a/ Số tập con phân biệt khác tập rỗng của M là $2^{2018}-1$. Gọi các tập con đó là $M_1, M_2, ..., M_{2^{2018}-1}$ và a_i là tích phần tử của M_i. Giả sử các phần tử của S là $p_1 < p_2 < ... < p_{2017}$. Ta viết các tích a_i dưới dạng $a_i = b_i^2 p_1^{k_{i_1}} p_2^{k_{i_2}} ... p_{2017}^{k_{i_{2017}}}$ trong đó $k_{i_j} \in \{0;1\}$. Ta có $2^{2018}-1$ bộ $(k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_{2017}})$, và do $k_{i_j} \in \{0;1\}$ nên có tối đa 2^{2017} bộ phân biệt.	0.5
	Do đó tồn tại 2 bộ trùng nhau, giả sử 2 bộ đó ứng với hai tích a_m, a_n. Khi đó tích $a_m.a_n$ là số chính phương. Bây giờ ta chỉ cần bỏ các phần tử thuộc giao của M_m và M_n ta còn lại các phần tử khác nhau mà tích là một số chính phương. Do đó bài toán được chứng minh.	1,0
	b/ Giả sử không có 2 câu lạc bộ nào chung nhau đúng 1 học sinh Nếu mỗi học sinh tham gia đúng 3 câu lạc bộ thì có tất cả 32 câu lạc bộ, mâu thuẫn. Suy ra có học sinh tham gia nhiều hơn 3 câu lạc bộ, giả sử là A tham gia câu lạc bộ thứ 1, 2, 3 và 4	0,5
	Xét câu lạc bộ đầu tiên có A, B và C. Câu lạc bộ thứ 2 có đúng 1 trong B hoặc C, giả sử là A, B và D. Nếu câu lạc bộ thứ 3 không có B thì phải có cả C và D, nghĩa là có A, C và D. Khi đó không tồn tại cách chọn câu lạc bộ thứ 4. Suy ra câu lạc bộ thứ 3 có B, khi đó có A, B và E. Lập luận tương tự ta suy ra câu lạc bộ có A thì có B và ngược lại có B thì có A.	1,0
	Giả sử A tham gia *k* câu lạc bộ thì B cũng tham gia *k* câu lạc bộ. Mỗi học sinh còn lại chỉ tham gia nhiều nhất 1 trong *k* câu lạc bộ này và nếu học sinh đó cùng câu lạc bộ với A, B thì không tham gia câu lạc bộ nào nữa (nếu C tham gia 1 câu lạc bộ khác thì câu lạc bộ đó chung với A, B, C đúng 1 học sinh C, trái giả sử). Lúc này còn 30 – *k* học sinh tham gia 33 – *k* câu lạc bộ. Lập luận lại từ đầu (do 30 – *k* nhỏ hơn 33 – *k*), tồn tại học sinh tham gia nhiều hơn 3 câu lạc bộ. Quá trình diễn ra vô hạn, điều này là vô lí do ta có hữu hạn học sinh và hữu hạn câu lạc bộ. *Bài toán có thể tổng quát: Có n học sinh tham gia n + 1 câu lạc bộ, mỗi học sinh có thể tham gia nhiều câu lạc bộ và mỗi câu lạc bộ có đúng 3 học sinh tham gia. Biết rằng không có 2 câu lạc bộ nào có 3 học sinh giống nhau. Chứng minh rằng có 2 câu lạc bộ chung nhau đúng 1 học sinh.*	1,0

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.

2. Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.

3. Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm.