SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi: **TOÁN**

Ngày thi thứ nhất: **20/9/2018**

Thời gian làm bài: **180** phút

Bài 1. *(5,0 điểm)* Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi công thức:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n} \text{ với mọi } n = 1,2,3...$$

Chứng minh rằng:

a) $n \le \sqrt{n}x_n < n + \frac{1}{6}H_n$, với mọi $n = 1,2,3...$ trong đó $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

b) $[9x_{81}] = 81$ (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

Bài 2. *(5,0 điểm)* Cho số nguyên *a* và đa thức $P(x)$ hệ số nguyên, hệ số bậc cao nhất là 1. Ta xây dựng dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = a,\ a_{n+1} = P(a_n) \text{ với mọi } n \in N.$$

Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên dương *m* thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

i) $|a_m| < |a_{m+1}| < |a_{m+2}| < ...$

ii) $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}...$ là dãy tuần hoàn với chu kì $T \le 2$.

Bài 3. *(5,0 điểm)* Cho tam giác *ABC* và hai điểm *M*, *N* nằm trên các cạnh *AC*, *AB* sao cho *MN* song song với *BC*. Điểm *P* di chuyển trên đoạn thẳng *MN*. Lấy các điểm *E*, *F* sao cho $EP \perp AC, EC \perp BC$, $FP \perp AB, FB \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng *EF* đi qua một điểm cố định khi *P* di chuyển.

b) Đường thẳng qua *A* vuông góc *EF* cắt *BC* tại *Q*. Chứng minh rằng trung trực của *BC* đi qua trung điểm của *PQ*.

Bài 4. *(5,0 điểm)* Cô giáo có tất cả 2020 viên kẹo gồm 20 loại kẹo khác nhau, mỗi loại ít nhất có 2 viên kẹo. Cô chia hết kẹo cho các học sinh của mình, mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận được nhiều hơn một viên kẹo ở một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kì so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kì đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M.

a) Xác định giá trị nhỏ nhất của M.

b) Với giả thiết tương tự nhưng thay 20 loại kẹo khác nhau bởi 19 loại kẹo khác nhau, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của M trong trường hợp tương ứng này.

——————HẾT——————

– Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
– Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh……………………………………Số báo danh……………..…

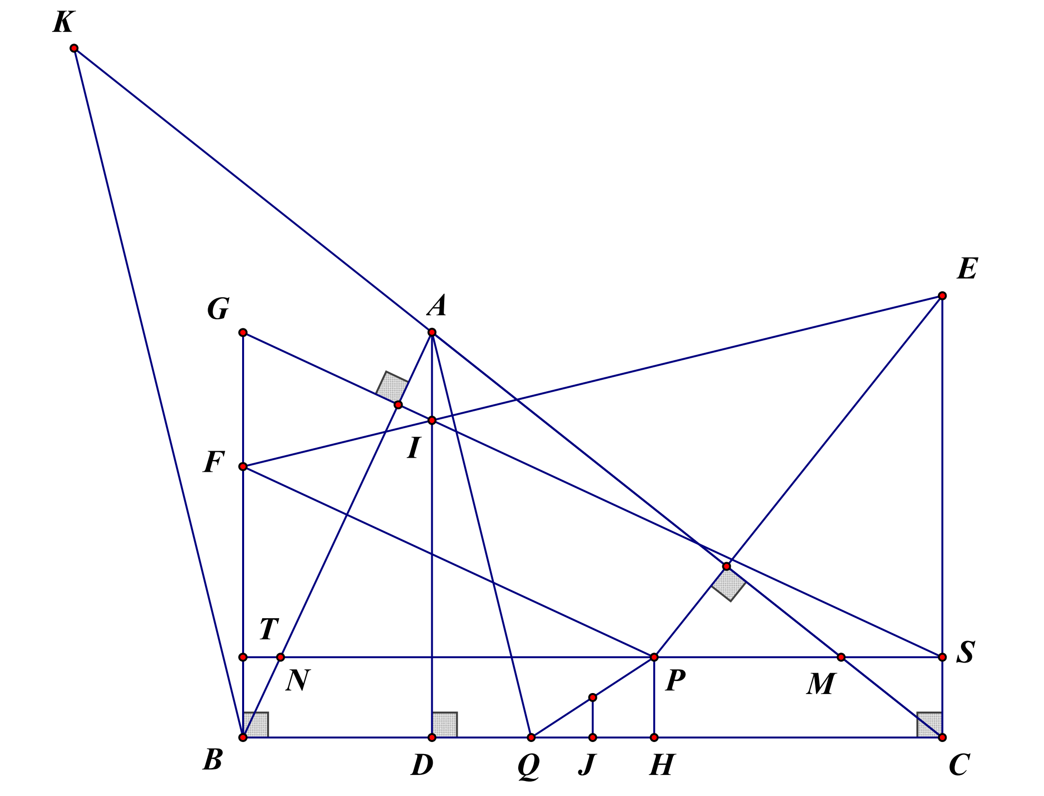
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN – Ngày thi thứ nhất

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Đáp án	Điểm
1.a 2,5 điểm	Do $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{4x_n^2} + 1$, $x_1^2 = 1$ nên ta chứng minh quy nạp $x_n^2 \ge n$. Với $n = 1$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến n, tức là $x_n^2 \ge n$. Suy ra $x_{n+1}^2 \ge n + 1 + \frac{1}{4x_n^2} > n + 1$ đúng. Từ đó ta có $\sqrt{n}x_n \ge n$.	**1**
	Lại có $x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4x_{n-1}^2} + 1 = \cdots = x_1^2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4x_k^2} \le n + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ $< n + \frac{1}{4}H_n < \left(\sqrt{n} + \frac{1}{6\sqrt{n}}H_n\right)^2 \Rightarrow \sqrt{n}x_n \le n + \frac{1}{6}H_n$.	**1,5**
1.b 2,5 điểm	Ta chứng minh $H_{81} < 6$. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $H_n \le 1 + \ln n$.	**1**
	Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ $\forall x > 0$ $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x)$ giảm trên khoảng $(0;+\infty) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$, hay $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x$ (*)	**0,5**
	Áp dụng BĐT trên ta có : $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{81} < 1 + \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln 81 - \ln 80 = 1 + \ln 81 < 6$ Từ đó : $81 \le \sqrt{81}\,x_{81} < 81 + \frac{1}{6}H_{81} < 82 \Rightarrow [9x_{81}] = 81$.	**1**
2 5 điểm	***<u>Trường hợp 1.</u>*** Với $\deg P(x) = 1$ thì $P(x) = x + c$, c nguyên. Suy ra $a_n = a_0 + n.c$ với mọi $n \in N$ hay (a_n) là cấp số cộng. +) Nếu $c = 0$, dãy (a_n) là dãy hằng, chọn $m = 1$ thì chu kì $T = 1$, thỏa mãn ii) +) Nếu $c > 0$, chọn $m = \|a_0\| + 1$, khi đó: $0 \le a_m < a_{m+1} < a_{m+2} < \ldots$ nên $\|a_m\| < \|a_{m+1}\| < \|a_{m+2}\| < \ldots$ thỏa mãn i) +) Nếu $c < 0$, chọn $m = \|a_0\| + 1$, khi đó: $0 \ge a_m > a_{m+1} > a_{m+2} > \ldots$ nên $\|a_m\| < \|a_{m+1}\| < \|a_{m+2}\| < \ldots$, thỏa mãn i).	**2**

	Trường hợp 2. Với $\deg P(x) \geq 2$, Xét đa thức $Q(x) = P^2(x) - x^2$, $Q(x)$ bậc chẵn, có hệ số bậc cao nhất là 1 nên tồn tại số x_0 nguyên dương để $Q(x) > 0 \Leftrightarrow \|P(x)\| > \|x\|$ với mọi $\|x\| > x_0$.	**1**
	Nếu tồn tại m để $\|a_m\| > x_0$ thì $\|a_m\| < \|a_{m+1}\| < \|a_{m+2}\| < \ldots$, thỏa mãn i). Ngược lại: $\|a_m\| \leq x_0$ với mọi m đủ lớn. Vì vậy dãy (a_n) bị chặn nên nó tuần hoàn. Ta chứng minh chu kì $T \leq 2$.	**1**
	Giả sử dãy $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ tuần hoàn theo chu kỳ $T > 2$. Khi đó $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+T-1}$ đôi một phân biệt và $a_m = a_{m+T}$. Ta có: $a_m - a_{m+1} \mid P(a_m) - P(a_{m+1}) = a_{m+1} - a_{m+2}$. Hoàn toàn tương tự, suy ra: $a_m - a_{m+1} \mid a_{m+1} - a_{m+2} \mid a_{m+2} - a_{m+3} \mid \ldots \mid a_{m+T-1} - a_{m+T} \mid a_{m+T} - a_{m+T+1} = a_m - a_{m+1}$ Do đó: $\|a_m - a_{m+1}\| = \|a_{m+1} - a_{m+2}\| = \|a_{m+2} - a_{m+3}\| = \ldots = \|a_{m+T-1} - a_{m+T}\|$. Nếu tồn tại $p < T$ để: $a_{m+p} - a_{m+p+1} = -(a_{m+p+1} - a_{m+p+2})$ thì $a_{m+p} = a_{m+p+2}$ nên dãy tuần hoàn theo chu kì $T = 2$, vô lý. Suy ra: $a_m - a_{m+1} = a_{m+1} - a_{m+2} = a_{m+2} - a_{m+3} = \ldots = a_{m+T-1} - a_{m+T}$. Hay $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+T}$ là cấp số cộng, nên $a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+T}$, vô lý. Vậy $T \leq 2$, thỏa mãn ii). Kết luận: luôn tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn bài toán.	**1**
3.a 2,5 điểm	 	

	Gọi AD là đường cao tam giác ABC, MN cắt CE, BF tại S, T. Đường thẳng qua S vuông góc với AB cắt EF, BF lần lượt tại I và G. Ta có ΔSPE ~ ΔDAC và ΔTPF ~ ΔDAB.	**1**
	Từ đó $\frac{IE}{IF}=\frac{ES}{FG}=\frac{ES}{PS}.\frac{PS}{FG}=\frac{ES}{PS}.\frac{TP}{TF}=\frac{CD}{AD}.\frac{AD}{DB}=\frac{DC}{DB}$.	**1**
	Vậy I thuộc AD suy ra I là giao điểm của AD và SG cố định. Ta có điều phải chứng minh.	**0,5**
3.b 2,5 điểm	Gọi H là hình chiếu của P lên BC. Ta sẽ chứng minh QB = HC từ đó suy ra trung trực BC chia đôi PQ. Cũng từ ΔSPE ~ ΔDAC và ΔTPF ~ ΔDAB.	**0,5**
	Ta có $\frac{PE}{PF}=\frac{PE}{PS}.\frac{PS}{PT}.\frac{PT}{PF}=\frac{AC}{AD}.\frac{HC}{HB}.\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC}=\frac{DC}{DB}$. Lấy K thuộc AC sao cho $BK \parallel AQ$. Ta dễ thấy ΔABK ~ ΔPFE.	**1**
	$\Rightarrow \frac{QB}{QC}=\frac{BQ}{AK}.\frac{AK}{AB}.\frac{AB}{QC}=\frac{QC}{AC}.\frac{PE}{PF}.\frac{AB}{QC}=\frac{AB}{AC}.\frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC}=\frac{HB}{HC}$ Lại có H, Q đều nằm giữa BC nên dễ suy ra QB = HC (đpcm)	**1**
4.a 2,5 điểm	Gọi $a_1,a_2,...,a_{20}$ là số viên kẹo của loại kẹo thứ $1,2,...,20$ với $a_i \geq 2$. Với loại kẹo thứ i $(1\leq i\leq 20)$, ta đếm số bộ (A,B) mà hai học sinh A,B đều có loại kẹo này. Số bộ cần đếm là $C_{a_i}^2$. Khi đó, theo giả thiết, tổng số bộ chính là M hay $$M=\sum_{i=1}^{20} C_{a_i}^2 \text{ trong đó } \sum_{i=1}^{20} a_i = 2020.$$	**1**
	Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpky ta có: $$M=\sum_{i=1}^{20}\frac{a_i\left(a_i-1\right)}{2}=\sum_{i=1}^{20}\frac{a_i^2}{2}-\sum_{i=1}^{20}\frac{a_i}{2}$$ $$\geq \frac{\left(\sum_{1}^{20}a_i\right)^2}{2.20}-\sum_{i=1}^{20}\frac{a_i}{2}=\frac{2020^2}{2.20}-\frac{2020}{2}=101000$$	**1**
	Dấu "=" xảy ra khi $a_i=101,\ \forall\, i=1,2,...,20.$ Vậy giá trị nhỏ nhất (GTNN) của M là 101000.	**0,5**

4.b 2,5 điểm	Như lý luận ở câu a, ta có: $M=\sum_{i=1}^{19}\frac{a_i\left(a_i-1\right)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{19}a_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{19}a_i$ nên biểu thức M đạt GTNN $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{19}a_i^2$ đạt GTNN. Ta sẽ chứng minh: $\sum_{i=1}^{19}a_i^2$ đạt GTNN khi $\left\|a_i-a_j\right\|\le 1$ với mọi $1\le i,j\le 19$. (1)	**1**
	Thật vậy: Xét bộ 4 số *a, b, c, d* mà $a\ge b+2$; $c=a-1$; $d=b+1$ thì ta có: $cd=ab+a-b-1\ge ab$ và $\left(a+b\right)^2=\left(c+d\right)^2$ suy ra $a^2+b^2\ge c^2+d^2$. Mở rộng tính chất này cho nhiều số ta suy ra (1) được chứng minh.	**0,5**
	Do đó M đạt GTNN khi có t số giá trị là k và $19-t$ số có giá trị là $k+1$ với $0\le t\le 19$ và GTNN là $$M=\frac{1}{2}\left[tk^2+(19-t)(k+1)^2-2020\right].$$ Ta có $tk+(19-t)(k+1)=2020 \Leftrightarrow t=19k-2001$. Do $0\le t\le 19$ nên $\frac{2001}{19}\le k\le\frac{2020}{19}$. Từ đây ta có $k=106, t=13$. Thay vào ta được GTNN của M là $\frac{1}{2}\left[13.106^2+6.107^2-2020\right]$=106371.	**1**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi: **TOÁN**

Ngày thi thứ hai: **21/9/2018**

Thời gian làm bài: **180** phút

Bài 1. *(5 điểm)* Ký hiệu tập hợp $M = \{-10;-9;-8; ..... ;9;10\}$. Xét đa thức

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

trong đó các hệ số a,b,c đều thuộc tập hợp *M*. Biết rằng $\left|P\left(2+\sqrt{2}\right)\right| < \frac{9}{2018}$, chứng minh đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Bài 2. *(5 điểm)* Cho một khung sắt có hình dạng là một tứ diện đều mỗi cạnh có độ dài 1 mét. Một con bọ ban đầu ở tại một đỉnh của tứ diện, bắt đầu di chuyển liên tục trên các cạnh của tứ diện theo quy tắc: tại mỗi đỉnh nó đến, nó sẽ chọn một trong ba cạnh tại đỉnh đó và di chuyển theo cạnh đó đến đỉnh tiếp theo. Với mỗi số nguyên dương *n*, tìm số cách đi của con bọ để nó trở lại đúng đỉnh ban đầu sau khi đã đi được đúng *n* mét.

Bài 3. *(5 điểm)* Cho tam giác *ABC* nhọn, không cân, đường cao *AH*, nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* có tâm là điểm *I* tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại các điểm *D*, *E*, *F*. Gọi *M* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC* của đường tròn (*O*). Đường thẳng *MD* cắt lại đường tròn (*O*) tại điểm *N*, đường thẳng *AN* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *P*.

a) Chứng minh rằng tam giác *ANI* vuông và tứ giác *AIHP* nội tiếp.

b) Đường thẳng *MH* cắt lại đường tròn (*O*) tại điểm *S*, đường thẳng *NS* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *Q*. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại điểm *N* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *PQ*.

Bài 4. *(5 điểm)* Cho *k* là số tự nhiên lớn hơn 1. Xét dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = 0; a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = ka_n + a_{n-1} \text{ với mọi } n \in N^*.$$

Xác định tất cả các giá trị của *k* sao cho tồn tại các số tự nhiên *m, n* (với *m* ≠ *n*) và các số nguyên dương *p*, *q* thỏa mãn điều kiện:

$$a_m + ka_p = a_n + ka_q .$$

——————————**HẾT**——————————

– *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*

– *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

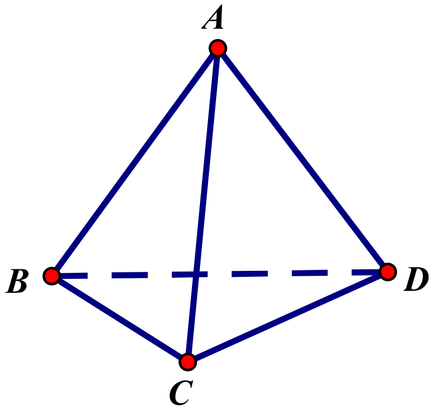
Họ và tên thí sinh……………………………………………Số báo danh…………….……

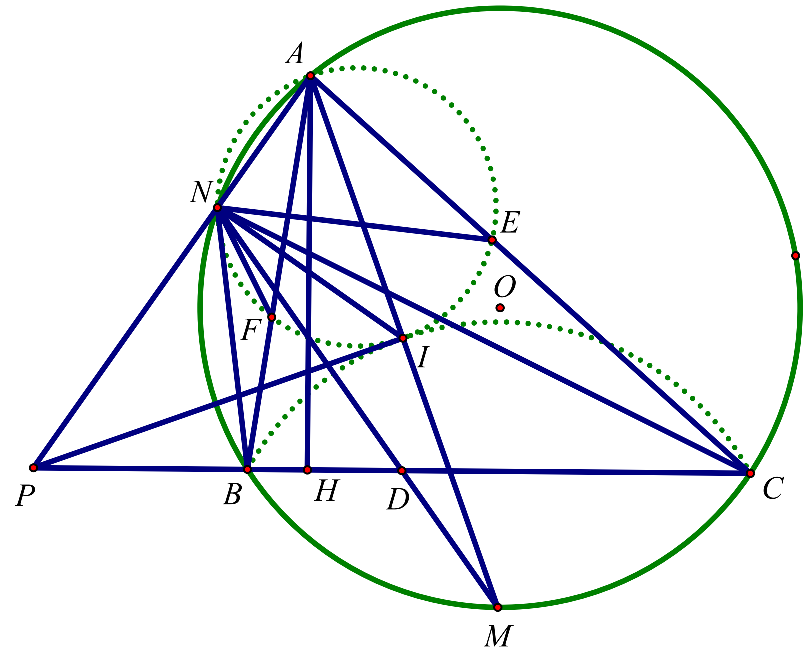
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

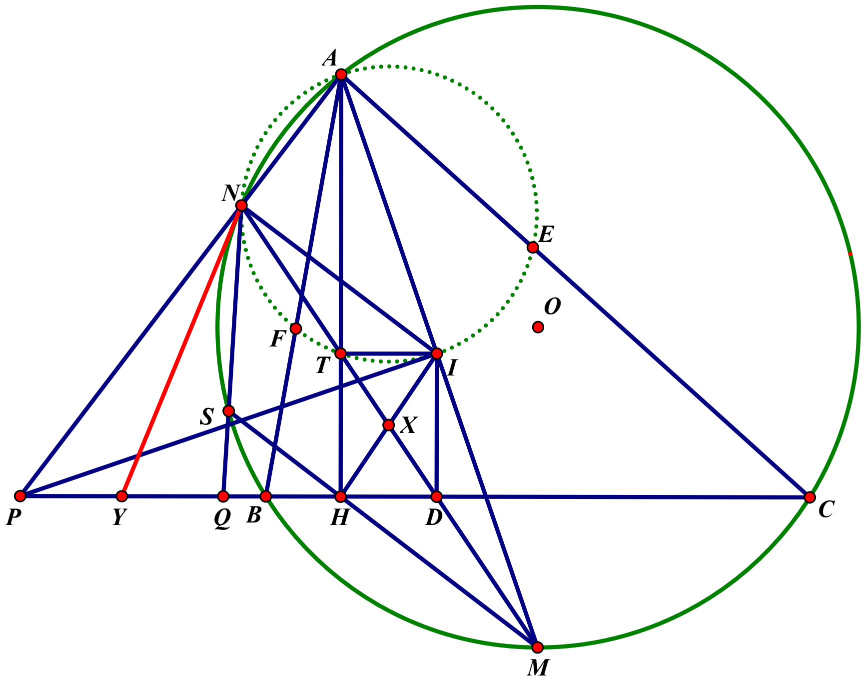
KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: TOÁN – Ngày thi thứ hai

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 5 điểm	Ta có $P\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(2+\sqrt{2}\right)^3+a\left(2+\sqrt{2}\right)^2+b\left(2+\sqrt{2}\right)+c$ $=\left(20+14\sqrt{2}\right)+a\left(6+4\sqrt{2}\right)+b\left(2+\sqrt{2}\right)+c$ $=\left(20+6a+2b+c\right)+\left(14+4a+b\right)\sqrt{2}$ $=m+n\sqrt{2}$ với $m=20+6a+2b+c;n=14+4a+b$. Do $a,b,c\in M$ nên $\|m\|\le 110$ và $\|n\|\le 64$.	**1**
	Trước hết ta chứng minh $2+\sqrt{2}$ là nghiệm của $P(x)$. Giả sử ngược lại rằng $2+\sqrt{2}$ không phải là nghiệm của $P(x)$. Khi đó $P\left(2+\sqrt{2}\right)\neq 0$ $\Leftrightarrow m+n\sqrt{2}\neq 0 \Leftrightarrow m, n$ không đồng thời bằng 0. Suy ra $m-n\sqrt{2}\neq 0$ và $\left\|m-n\sqrt{2}\right\|\le\|m\|+\|n\|\sqrt{2}\le 110+64.\frac{3}{2}=206$.	**1**
	Từ đây ta có $\left\|P\left(2+\sqrt{2}\right)\right\|=\left\|m+n\sqrt{2}\right\|=\left\|\frac{m^2-2n^2}{m-n\sqrt{2}}\right\|\ge\frac{1}{206}>\frac{9}{2018}$, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Vì vậy $2+\sqrt{2}$ là nghiệm của $P(x)$.	**1**
	Do $2+\sqrt{2}$ là nghiệm của $P(x)$ nên $m+n\sqrt{2}=0\Leftrightarrow m=n=0$. Ta có $P\left(2-\sqrt{2}\right)=m-n\sqrt{2}=0$ nên $2-\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của $P(x)$.	**1**
	Mặt khác $2+\sqrt{2}$ và $2-\sqrt{2}$ là hai nghiệm của tam thức x^2-4x+2 nên ta phải có $P(x)=\left(x^2-4x+2\right)\left(x+\frac{c}{2}\right)$ hay $P(x)$ còn có nghiệm $-\frac{c}{2}\in Q$. Vậy $P(x)$ có ba nghiệm thực phân biệt.	**1**
Bài 2 5 điểm	 Giả sử khung sắt có dạng là một hình tứ diện đều $ABCD$ mỗi cạnh có độ dài 1 mét và ban đầu con bọ ở tại đỉnh A. Gọi a_n, b_n, c_n, d_n là số cách đi để đúng sau khi đi được n mét con bọ sẽ tương ứng đến A, B, C, D.	**1**

	Với mỗi $n > 1$, i) Do tính đối xứng của các đỉnh *B, C* và *D* nên $$b_n = c_n = d_n, \qquad (1)$$ ii) Muốn đi đến *A* phải từ *B, C* hoặc *D* đi thêm 1 mét nữa nên: $$a_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}, \qquad (2)$$ iii) Tương tự cũng có: $b_n = a_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$ (3)	**2**
	Từ (1) và (2) ta có: $a_n = 3b_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 3b_n$. Kết hợp với (3) ta được: $$a_{n+1} = 3b_n = 3(a_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1})$$ $$= 3(a_{n-1} + 2b_{n-1}) = 3a_{n-1} + 2a_n$$ hay là $$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \text{ với mọi } n > 1.$$	**1**
	Dãy số này có phương trình đặc trưng $t^2 = 2t + 3$, có các nghiệm $t = 3$ và $t = -1$ nên số hạng tổng quát của dãy có dạng: $$a_n = A.3^n + B.(-1)^n \text{ với mọi } n \in \boldsymbol{N}^*.$$ Kết hợp với $a_1 = 0$, $a_2 = 3$ ta tính được kết quả: $$a_n = \frac{3^n + 3.(-1)^n}{4} \text{ với mọi } n \in \boldsymbol{N}^*.$$	**1**
<u>Bài 3</u> 5 điểm	a) (3 điểm)  	
	Ta xét trường hợp $AB < AC$, trường hợp còn lại tương tự. Ta có *ND* là phân giác trong tam giác *NBC* nên $\frac{NB}{NC} = \frac{DB}{DC}$. Lại có $DB = FB$ và $DC = EC$ nên suy ra $\frac{NB}{NC} = \frac{FB}{EC}$. Kết hợp với $\angle NBF = \angle NCE$ ta được $\Delta NBF \sim \Delta NCE$. Suy ra $\angle NFB = \angle NEC \Rightarrow \angle NFA = \angle NEA \Rightarrow$ các điểm *A, N, E, F* nằm trên một đường tròn. Do đường tròn này có đường kính là *AI,* suy ra tam giác *ANI* vuông tại *N*.	**1**

	Theo tính chất quen thuộc ta có $MB = MC = MI$, suy ra các điểm B, I, C nằm trên đường tròn tâm M, ta ký hiệu là (M). Ta có $PN.PA = PB.PC$ suy ra P có cùng phương tích đối với hai đường tròn đường kính AI và đường tròn (M).	**1**
	Lại có hai đường tròn này có M nằm trên AI và có điểm chung I suy ra chúng tiếp xúc ngoài với nhau tại I. Từ đó PI là trục đẳng phương của hai đường tròn, suy ra $PI \perp AI$. Kết hợp với $PH \perp HA$ ta suy ra tứ giác $AIHP$ nội tiếp đường tròn đường kính AP.	**1**
	b) (2 điểm)  	
	Gọi T là giao điểm khác A của AH và đường tròn đường kính AI. Suy ra $IT \perp AH$ nên $IDHT$ là hình chữ nhật. Khi đó theo định lý Simson thì N, T, D thẳng hàng (do I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APH) suy ra đường thẳng MN đi qua trung điểm X của đoạn IH.	**1**
	Gọi Y là trung điểm của PQ. Ta chứng minh NY là tiếp tuyến của đường tròn (O). Xét hai tam giác MIH và NPQ có: $\angle IMH = \angle PNQ$ (tứ giác $ANSM$ nội tiếp) và $\angle MIH = \angle NPQ$ (tứ giác $AIHP$ nội tiếp) nên $\Delta MIH \sim \Delta NPQ$. Do MX và NY là trung tuyến tương ứng của các tam giác trên nên suy ra $\Delta MXH \sim \Delta NYQ \Rightarrow \angle HMX = \angle QNY$ hay $\angle SMN = \angle SNY$ suy ra NY là tiếp tuyến của đường tròn (O).	**1**
<u>Bài 4</u> 5 điểm	Với $k = 2$, ta có dãy $a_0 = 0; a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ với mọi $n \in N^*$. Suy ra $a_2 = 2; a_3 = 5$. Khi đó $a_0 + 2a_2 = 4 = a_2 + 2a_1$ nên cặp $(m,n) = (0,2)$ và $(p,q) = (2,1)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.	**1**
	Ta sẽ chứng minh với mọi số tự nhiên $k \geq 3$ đều không thỏa mãn bài toán bằng phản chứng. Thật vậy với $k \geq 3$ thì (a_n) là dãy tăng đồng thời $a_{n+1} - a_{n-1} = ka_n \vdots a_n$ với mọi $n \in N^*$. Do đó, với mọi $n \in N$ thì $a_{2n} \equiv a_0 \equiv 0 \pmod{k}$ và $a_{2n+1} \equiv a_1 \equiv 1 \pmod{k}$ (*).	**1**

	Giả sử tồn tại các cặp số $m, n \in \mathbb{N}$ và $p, q \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $m \neq n$ và $a_m + ka_p = a_n + ka_q$. Không mất tính tổng quát giả sử $m < n$, suy ra $a_m < a_n, a_p > a_q$, ta có các trường hợp sau đây: ***<u>Trường hợp 1:</u>*** $p < m < n$. Khi đó $$a_m + ka_p \le a_m + ka_{m-1} < ka_m + a_{m-1} = a_{m+1} \le a_n < a_n + ka_q$$ mâu thuẫn, nên trường hợp này không thỏa mãn.	
	<u>Trường hợp 2:</u> $p = m < n$. +) Nếu $p = m = n - 1$ thì $$a_n + ka_q = a_m + ka_p = (k+1)a_{n-1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = k(a_{n-1} - a_q),$$ vô lý vì vế trái không chia hết cho k. +) Nếu $p = m < n - 1$ thì $$a_m + ka_p \le a_{n-2} + ka_{n-2} < a_{n-2} + ka_{n-1} = a_n \le a_n + ka_q,$$ mâu thuẫn với giả sử.	**1**
	<u>Trường hợp 3:</u> $m < p < n$. Khi đó $a_m \le a_{p-1}$, $a_{p+1} \le a_n$ và $a_q > 0$ nên $$a_m + ka_p \le ka_p + a_{p-1} = a_{p+1} \le a_n < a_n + ka_q,$$ mâu thuẫn với giả sử.	**1**
	<u>Trường hợp 4:</u> $m < n \le p$. Khi đó ta có từ $a_m + ka_p = a_n + ka_q \ge ka_p$ $\Rightarrow ka_q \ge ka_p - a_n \ge (k-1)a_p \Rightarrow a_q \ge \frac{k-1}{k}a_p$. Mặt khác $a_p = ka_{p-1} + a_{p-2} \ge ka_{p-1}$ và $a_p > a_q$ nên $$a_p > a_q \ge \frac{k-1}{k}a_p \ge \frac{k-1}{k}.ka_{p-1} = (k-1)a_{p-1} \ge a_{p-1.}$$ Do dãy (a_n) tăng nên phải có $q = p - 1$ và các đánh giá trên đồng thời xảy ra đẳng thức $\Rightarrow a_q = a_{p-1} = 0 \Rightarrow q = 0$, vôlý. Vậy chỉ có giá trị $k = 2$ thỏa mãn bài toán.	**1**

------------------- HẾT ---------------------