

Bài 1. Cho hai biểu thức $N = \frac{24}{\sqrt{x}+6}$ và $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} + \frac{1}{\sqrt{x}-6} + \frac{17\sqrt{x}+30}{x-36}$ với $x \geq 0, x \neq 36$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức N khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức M .
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $L = M \cdot N$ có giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Hai công nhân làm chung một công việc thì sau 5 giờ 50 phút sẽ hoàn thành xong công việc đó. Sau khi làm chung 5 giờ thì người thứ nhất đi làm việc khác trong khi người thứ hai vẫn tiếp tục làm trong 2 giờ nữa mới hoàn thành xong công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải mất bao nhiêu thời gian để hoàn thành xong công việc?

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + \frac{2}{|y-1|} = 5 \\ 2x - \frac{1}{|1-y|} = 1 \end{cases}.$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 2$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{-x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , với các đường cao AD, BE, CF . Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở S . Đường thẳng AS theo thứ tự cắt các đường thẳng DE, EF và BC tại L, I và J . Gọi M là trung điểm của BC .

1) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

2) Đoạn thẳng AS cắt đường tròn (O) tại điểm K , khác A . Chứng minh rằng $\frac{SA}{SK} = \frac{JA}{JK}$.

3) Chứng minh rằng I là trung điểm EF .

4) Gọi N là trung điểm AB . Chứng minh rằng các điểm M, L, N cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 5.

1) Giải phương trình $x+1 = (2x+1)\sqrt{\sqrt{x}+1} + 2$.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2020(b^2 + c^2)}{a^2} + \frac{a}{b+c}.$$

----- HẾT -----

Bài 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1$ và $B = \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

1. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho A nhận giá trị nguyên.
2. Rút gọn biểu thức $P = A : B$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 1$.

Bài 2. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô, gọi là X_A , xuất phát từ thành phố A đi về hướng thành phố B và một chiếc ô tô khác, gọi là X_B , xuất phát từ thành phố B đi về hướng thành phố A . Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau tại một điểm C (nằm giữa quãng đường AB) cách A 20km, rồi tiếp tục hành trình của mình. Cả hai xe, sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và gặp nhau lần thứ hai tại một điểm D trên quãng đường AB . Biết thời gian xe X_B đi từ D đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ. Hãy tính vận tốc của từng xe.

Bài 3. Cho đường thẳng $d : y = 2x - a^2$ và parabol $\mathcal{P} : y = ax^2$ (a là tham số dương).

1. Tìm a để d cắt $\mathcal{P}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó, chứng minh rằng A, B đều nằm về bên phải của trục tung.
2. Gọi x_1, x_2 tương ứng là hoành độ của A, B . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{4}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}$.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Từ một điểm C ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến CA, CB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng Δ đi qua C , cắt (O) tại hai điểm M, N phân biệt (M nằm giữa C và N). Đường thẳng AB tương ứng cắt các đường thẳng OC và MN tại H và K . Gọi I là trung điểm MN .

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, O và I cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh rằng $CM \cdot CN = CI \cdot CK$.
3. Tiếp tuyến tại M của (O) tương ứng cắt CA và CB tại E và F . Đường thẳng vuông góc với CO tại O tương ứng cắt CA và CB tại P và Q . Chứng minh rằng khi Δ thay đổi, nhưng luôn cắt (O) tại hai điểm phân biệt, thì tích $PE \cdot QF$ không đổi.
4. Xác định vị trí của M sao cho $\frac{PE + QF}{PQ}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5.

1. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + 3y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{4}{4x^2 + 9y^2} + \frac{9}{xy}.$$

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 1, b \geq 4, c \geq 9$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc} \leq \frac{11}{12}$$

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP TOÁN 9 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI AMSTERDAM

A. PHẦN ĐẠI SỐ.

CHUYÊN ĐỀ. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Kiến thức và kỹ năng cơ bản

1. Các bước giải

Bước 1. Lập hệ phương trình.

- +) Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- +) Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
- +) Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình nói trên.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận.

2. Một số dạng toán thường gặp

- **Dạng 1:** Toán chuyển động (chuyển động trên đường sông có tính đến dòng nước chảy,...).

$$* \begin{cases} v_X = v_T + v_D \\ v_N = v_T - v_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_T = \frac{v_X + v_N}{2} \\ v_D = \frac{v_X - v_N}{2} \end{cases}$$

$$* S = v \times t$$

- **Dạng 2:** Bài toán về làm chung, làm riêng và mô hình vòi nước.
- **Dạng 3:** Bài toán có nội dung hình học và toán về quan hệ giữa số và chữ số.
- **Dạng 4:** Bài toán liên quan đến tỉ lệ %.
- **Dạng 5:** Các dạng toán khác (toán về sự thay đổi thừa số và tích, toán năng suất...)

II. Bài tập

Bài 1. Tìm một số có hai chữ số, biết tổng của hai chữ số đó bằng 13 và nếu đổi chỗ hai chữ số đó cho nhau thì được một số lớn hơn số đã cho 27 đơn vị.

Bài 2. Một ca nô xuôi dòng 42 km, rồi ngược dòng trở lại 20 km hết tổng cộng 5 giờ. Biết vận tốc của dòng chảy là 2 km/h. Tính vận tốc của ca nô lúc dòng nước đứng yên.

Bài 3. Hai bến sông A và B cách nhau 30 km. Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B. Ca nô đến B rồi quay lại A ngay. Cả đi lẫn về hết 2 giờ 30 phút. Khi ca nô khởi hành từ A thì cùng lúc đó, một khúc gỗ cũng trôi tự do từ A theo dòng nước và gặp ca nô trên đường trở về tại một điểm cách A là 10 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Bài 4. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn người đó đã tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

Bài 5. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ 2 làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó thì mấy giờ xong.

Bài 6. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể, thì sau 6 giờ đầy. Nếu vòi 1 chảy 20 phút và vòi 2 chảy 30 phút thì được $\frac{1}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì phải bao lâu mới đầy bể ?

Bài 7. Một công nhân dự tính làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng trong thực tế xí nghiệp lại giao làm 80 sản phẩm. Vì vậy, mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm song thời gian hoàn thành công việc vẫn tăng so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Bài 8. (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội 2008-2009)

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất, vì vậy hai tổ sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 9. (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội 2009-2010)

Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ 2 may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong một ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Bài 10. (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Hà Nội 2010-2011)

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

B. PHẦN HÌNH HỌC.

CHUYÊN ĐỀ. CUNG CHỨA GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quỹ tích cung chứa góc: Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Chú ý: Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB . Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.

Đặc biệt: Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. Cách vẽ cung chứa góc α

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB ;
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α ;
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung $\widehat{AmB}$, tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax . Cung $\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .

Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .

Từ đó đi đến kết luận quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H .

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Phương pháp giải:

- Tìm đoạn cố định trong hình vẽ.
- Nối điểm phải tìm với hai đầu đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α .
- Khẳng định điểm phải tìm quỹ tích thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn cố định.

Bài 1. Cho tam giác ABC có BC cố định và góc A bằng 50° . Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Tìm quỹ tích điểm D .

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi điểm A thay đổi.

Dạng 2. Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn

Phương pháp giải: Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là AB và cùng nhìn đoạn cố định AB dưới một góc không đổi.

Chú ý. Với dạng toán này, ta cũng có thể chứng minh bằng việc chỉ ra có một điểm cách đều các điểm đã cho. Tức là chỉ ra cụ thể tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa của cung AB . Trên cung AM lấy điểm N . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MB$, trên tia đối của tia NB lấy điểm E sao cho $NA = NE$, trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$. Gọi I, O theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác. Gọi H là giao điểm của các đường cao BD và CE . Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

Dạng 3. Dựng cung chứa góc

Phương pháp giải: Thực hiện quy trình dựng sau đây:

1. Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB ;

2. Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α ;
3. Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
4. Vẽ cung $\widehat{AmB}$, tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax . Cung $\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

Bài 5. Dựng một cung chứa góc 55° trên đoạn thẳng $AB = 3\text{ cm}$.

Bài 6. Dựng tam giác ABC , biết $BC = 3\text{ cm}$; $\hat{A} = 50^\circ$ và $AB = 3,5\text{ cm}$.

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF . Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác BF . Từ điểm I nằm giữa B và F vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt AI tại D . Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E . Chứng minh:

- a) Bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn;
- b) Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra $BE \perp CE$.

Bài 9. Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn thẳng $AB = 5\text{ cm}$.