

Câu I. (2.0 điểm) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu II. (2.0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$$

2) Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm $A(2;2)$, đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a để parabol $(P): y = ax^2$ đi qua điểm A . Với giá trị a tìm được, hãy xác định tọa độ điểm B là giao điểm thứ hai của (d) và (P) .

Câu III. (2.0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - 5m = 0$ (m là tham số)

1) Giải phương trình khi $m = 3$.

2) Tìm giá trị của tham số m phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.

Câu IV. (3.0 điểm) Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại C, D (C nằm giữa M và D). Gọi E là giao điểm của AB và OM .

1) Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp.

2) Chứng minh $MC \cdot MD = ME \cdot MO$.

3) Giả sử $OM = 3R$. Tìm diện tích lớn nhất của tứ giác $MADB$.

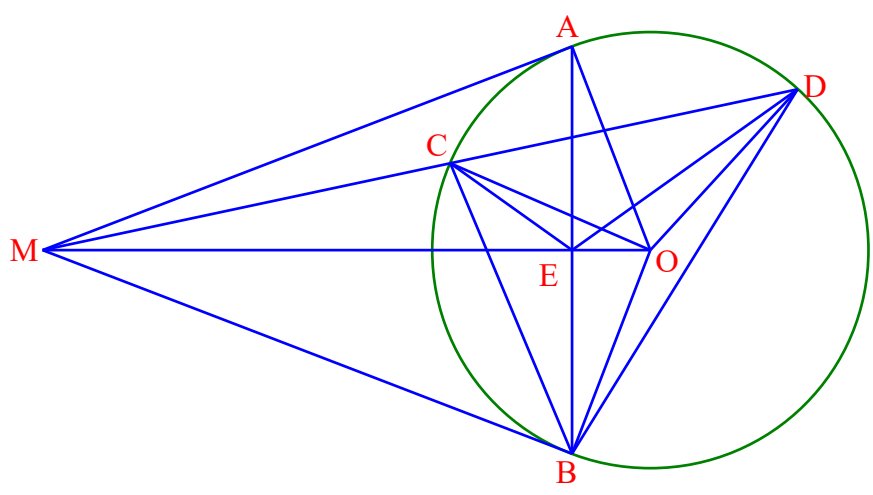
Câu V. (1.0 điểm) Cho các số thực $a, b, c > -1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c^2-a^2}{1+b+c^2} + \frac{c+a^2-b^2}{1+c+a^2} + \frac{a+b^2-c^2}{1+a+b^2} \leq 1.$$

=====HẾT=====

Thí sinh không được sử dụng tài liệu; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu/ý	Lời giải – Đáp án	Điểm
I.1)	Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$. 1) Rút gọn biểu thức P	
	Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ $= \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} = \frac{2}{\sqrt{a}-1}.$	0,5 0,5
I.2)	2) Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$	
	Khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện xác định), ta có: $\sqrt{a} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1;$ Suy ra: $P = \frac{2}{\sqrt{a}-1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$ Vậy $P = \sqrt{2}$ khi $a = 3 + 2\sqrt{2}.$	0,5 0,5
II.1)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases}.$	
	Ta có: $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2).$	0,5 0,5
II.2)	Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 2)$, đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a để parabol $(P): y = ax^2$ đi qua điểm A. Với giá trị a tìm được, hãy xác định tọa độ điểm B là giao điểm thứ hai của (d) và (P).	
	Thay $x = 2, y = 2$ vào pt $(P): 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ suy ra $(P): y = \frac{1}{2}x^2.$ Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d): $\frac{1}{2}x^2 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = -4 \Rightarrow y = 8 \end{cases}.$ Vậy giao điểm còn lại là $B(-4; 8).$	0,5 0,5

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - 5m = 0$ (m là tham số)		
1) Giải phương trình khi $m = 3$		
III.1)	Với $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 2x - 15 = 0$. Ta có $\Delta' = 1 + 15 = 16$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{16} = -3$; $x_2 = 1 + \sqrt{16} = 5$	0,5 0,5
Tìm giá trị của tham số m phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và thỏa mãn $x_1.x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.		
III.2)	Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1^2 + 5m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.	0,25
	Khi đó, theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{-5m}{1} = -5m & (2) \end{cases}$	
	Theo đề bài ta có: $x_1.x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$ (3). Từ (1) $\Rightarrow x_1 = 2 - x_2$. Thay vào (2) và (3), ta có:	0,25
	$\begin{cases} (2 - x_2)x_2 = -5m \\ (2 - x_2).x_2^2 - (2 - x_2)(5m + 3x_2) = 10115 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2).x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 - 2x_2 + 3x_2) = 10115 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2).x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 + x_2) = 10115 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ 2x_2^2 - x_2^3 - 2x_2^2 - 2x_2 + x_2^3 + x_2^2 = 10115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ x_2^2 - 2x_2 = 10115 \end{cases}$	
	$\Rightarrow 5m = 10115 \Leftrightarrow m = 2023$ (thỏa mãn). Vậy $m = 2023$.	0,25
Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại C, D (C nằm giữa M và D). Gọi E là giao điểm của AB và OM.		
1) Chứng minh tứ giác $OAMB$ nội tiếp.		
IV.1)		

	Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến).	0,5
	Do đó $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.	0,5
IV.2)	Chứng minh $MC.MD = ME.MO$.	
	Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có: $\widehat{M}$ chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ nên $\triangle MAC \sim \triangle MDA (g.g)$	
	Do đó: $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$ (1)	0,5
	Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên ta có MO là trung trực của AB .	
	Xét tam giác MAO vuông tại A có $AE \perp MO$ nên $MA^2 = ME.MO$ (2)	
	Từ (1) và (2), ta có $MC.MD = ME.MO$	0,5
IV.3)	Giả sử $OM = 3R$. Tìm diện tích lớn nhất của tứ giác $MADB$.	
	Xét tam giác MAO vuông tại A có $AE \perp MO$ nên $OA^2 = OE.OM$	
	$\Rightarrow OE = \frac{R}{3} \Rightarrow ME = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3} \Rightarrow AE^2 = ME.MO = \frac{8R^2}{9} \Rightarrow AE = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$	0,25
	$\Rightarrow AB = \frac{4R\sqrt{2}}{3}$.	0,25
	Hạ: $DH \perp AB$ thì ta có $DH \leq DE \leq DO + OE = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$	0,25
	Do đó: $S_{MADB} = S_{MAB} + S_{DAB} = \frac{1}{2} ME.AB + \frac{1}{2} DH.AB$	0,25
	$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{8R}{3} \cdot \frac{4R\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4R}{3} \cdot \frac{4R\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}R^2}{3}$.	
	Vậy S_{MADB} đạt GTLN là $\frac{8\sqrt{2}R^2}{3}$ khi M, C, O, D thẳng hàng.	0,25
V.	Cho các số thực $a, b, c > -1$. Chứng minh rằng: $\frac{b+c^2-a^2}{1+b+c^2} + \frac{c+a^2-b^2}{1+c+a^2} + \frac{a+b^2-c^2}{1+a+b^2} \leq 1.$	
	Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$	0,25
	Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $1+b+c^2 > 0, 1+b+c^2 \leq 1 + \frac{1+b^2}{2} + c^2.$	
	Suy ra $\frac{1+a^2}{1+b+c^2} \geq \frac{2(1+a^2)}{1+b^2+2(1+c^2)}.$	
	Tương tự ta có $\frac{1+b^2}{1+c+a^2} \geq \frac{2(1+b^2)}{1+c^2+2(1+a^2)}.$	
	$\frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq \frac{2(1+c^2)}{1+a^2+2(1+b^2)}$	0,25
	Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và đặt $x = a^2 + 1, y = b^2 + 1, z = c^2 + 1$ ta được	

$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y}$ $= 2 \left(\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \right)$ Sử dụng bất đẳng thức C – S (Cô-si cộng mẫu) ta có $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+2z) + y(z+2x) + z(x+2y)}$ $= \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)} = 1$ Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.	0.25 0,25
---	-------------------------

=====Hết=====

(Học sinh giải đúng theo cách khác vẫn cho điểm tối đa)