

Câu 1: (2,0 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - y = 9. \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm số nguyên x lớn nhất để P có giá trị là số nguyên.

Câu 3: (2,0 điểm).

a) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 và (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 6$.

b) Cho phương trình $x^2 - mx - 1 - 3m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $x_2 - |x_1| + 3x_1x_2 = -13$.

Câu 4: (3,0 điểm).

Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, trên đoạn OA lấy điểm I sao cho $AI = \frac{2}{3}OA$.

Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I . Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng M, N, B). Nối AC cắt MN tại E .

a) Chứng minh: Tứ giác $IECB$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$ và MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC

c) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Câu 5: (1,0 điểm). Xét các số thực dương $a, b > 0$ thỏa mãn: $ab + a + b = 3$.

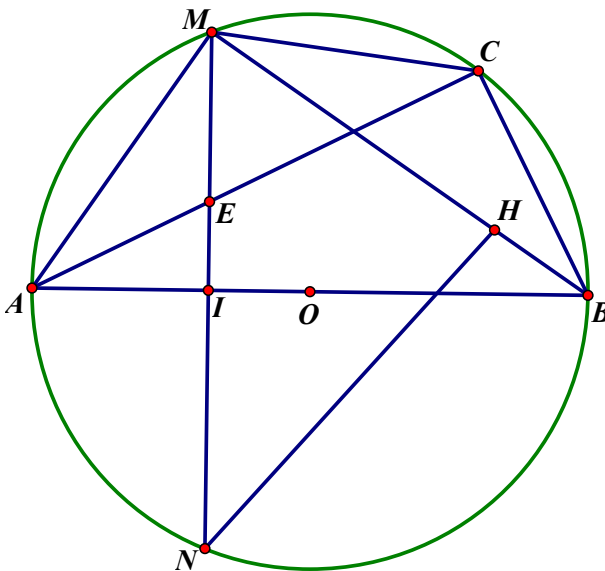
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2+b^2}{3}.$$

----- **Hết** -----

(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Họ và tên thí sinh:..... ; Số báo danh:.....

Bài	Đáp án	Điểm
Câu 1: (2,0đ).	a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ Ta có: $\Delta = (-5)^2 - 4.3.(-2) = 49 > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{6} = 2; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{6} = \frac{-1}{3}$	0,5đ 0,5đ
	b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 15x - 3y = 27 \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 26 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (2;1)$	0,25đ
Câu 2: (2,0đ).	ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	$= \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	$= \left(\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) + 4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	$= \left(\frac{2x - 4\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} - 2 + 4\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{x - 3\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$	0,25đ
	b) $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3-2}{\sqrt{x}-3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}-3}$	0,25đ
	Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}-3 \in U_{(2)} = \{-2; -1; 1; 2\}$ $* \quad \sqrt{x}-3 = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (TM)}$	0,25đ

	* $\sqrt{x} - 3 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (Loại) * $\sqrt{x} - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (TM) * $\sqrt{x} - 3 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ (TM) Vì x là số nguyên lớn nhất nên $x = 25$	0,25đ
		0,25đ
Câu 3: (2,0đ).	Vì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 nên $x = 3; y = 0$	0,25đ
	Do (d) song song với đường thẳng $y = 2x + 6$	0,25đ
	Nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 6 \end{cases}$	0,25đ
	Thay $a = 2; x = 3; y = 0$ vào hàm số $y = ax + b$ ta có: $0 = 2.3 + b \Rightarrow b = -6$ (thỏa mãn)	0,25đ
	Vậy $a = 2; b = -6$	0,25đ
	b) Ta có $ac = -1 - 3m^2 < 0 \forall m$ Nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 0, x_2 > 0$ ($x_1 < x_2$).	0,25đ
	Do đó $x_2 - x_1 + 3x_1x_2 = x_2 + x_1 + 3x_1x_2 = m - 3(1 + 3m^2)$.	0,25đ
	Từ giả thiết ta có $m - 3(1 + 3m^2) = -13 \Leftrightarrow 9m^2 - m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{10}{9} \end{cases}$.	0,25đ
	Vậy $m = \frac{10}{9}$ và $m = -1$ là giá trị cần tìm.	0,25đ
Câu 4: (3,0đ).		
	a) Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{BIE} = 90^\circ$ (giả thiết). $\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BIE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Tứ giác $IECB$ có tổng hai góc đối nhau bằng 180° nên nội tiếp được đường tròn.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

	b) Xét hai tam giác AIE và tam giác ACB có: Góc A chung và $\widehat{AIE} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ Suy ra: $\Delta AIE \sim \Delta ACB$ (g – g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AC} \Rightarrow AI \cdot AB = AC \cdot AE$ Do đó: $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI \cdot AB - AI \cdot IB = AI(AB - IB) = AI^2$. Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC. Ta có: $HM = HE \Rightarrow \Delta MHE$ cân tại H. $\Rightarrow \widehat{HME} = \frac{180^\circ - \widehat{MHE}}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{MHE}$ Lại có: $\widehat{MCE} = \frac{1}{2} \widehat{MHE} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung ME của đường tròn tâm H)}$ Do đó: $\widehat{HME} = 90^\circ - \widehat{MCE} \Leftrightarrow \widehat{HME} + \widehat{MCE} = 90^\circ$ (1) Lại có : đường kính AB vuông góc dây MN nên AB là trung trực của MN, do đó A là điểm chính giữa cung MN suy ra $\widehat{AM} = \widehat{AN} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{MCE}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HME} + \widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMH} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp HM$ Vậy MA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC (đpcm).	0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
	c) Do AM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC mà AM vuông góc BM nên H thuộc MB khi đó NH nhỏ nhất khi $NH \perp BM$. suy ra tứ giác IHBN nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{HNI} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung HI)}$ $\Rightarrow \Delta MHN \sim \Delta MIB \text{ (g – g)}$ $\frac{MH}{MI} = \frac{MN}{MB}$ $\Rightarrow MH \cdot MB = MI \cdot MN$ Mà $MN = 2 \cdot MI$ nên $\Rightarrow MH \cdot MB = 2MI^2$. Xét tam giác vuông OIM, có: $MI^2 = MO^2 - OI^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}$ Xét tam giác vuông BIM, có: $MB^2 = MI^2 + IB^2 = \frac{8R^2}{9} + \left(\frac{4R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow MB = \frac{2\sqrt{6} \cdot R}{3}$ Do đó: $MH \cdot \frac{2\sqrt{6} \cdot R}{3} = 2 \cdot \frac{8R^2}{9} \Rightarrow MH = \frac{8R}{3\sqrt{6}}$ $\Rightarrow \text{Điểm H thuộc tia MB sao cho } MH = \frac{8R}{3\sqrt{6}}$ Vì H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEC nên $MH = HC = \frac{8R}{3\sqrt{6}}$	0.25đ 0,25đ 0.25đ

	Vậy điểm C là giao điểm của đường tròn $(O; R)$ và đường tròn $\left(H; \frac{8R}{3\sqrt{6}}\right)$	0.25đ
Câu 5: $(1, 0đ)$.	$P = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2 + b^2}{3}$	0.25đ
	Từ $ab + a + b = 3 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 4$	
	$2 = \sqrt{(a+1)(b+1)} \leq \frac{a+b+2}{2} \Rightarrow a+b \geq 2 \Rightarrow ab \leq 1 \quad (\text{vì } a+b+ab=3)$	
	Đặt $t = \sqrt{a+b+2} \Rightarrow 2 \leq t \leq \sqrt{5}$	
	$P = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{3} + \frac{a+b}{4} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}}$	0.25đ
	$12P = -(a^2 + b^2) + 3(a+b) - \frac{12}{\sqrt{a+b+2}}$	
	Ta có: $a+b = t^2 - 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = t^4 - 6 - 2t^2$	
	$12P = -t^4 + 2t^2 + 6 + 3(t^2 - 2) - \frac{12}{t} = -t^4 + 5t^2 - \frac{12}{t}$	0.25đ
	Theo Cauchy ta có: $\frac{3}{4}t^2 + \frac{6}{t} + \frac{6}{t} \geq 9 \Rightarrow -\frac{12}{t} \leq \frac{3}{4}t^2 - 9$	
	$\Rightarrow 12P \leq -t^4 + 5t^2 + \frac{3}{4}t^2 - 9 \Rightarrow 48P \leq -4t^4 + 23t^2 - 36$	
	$\Rightarrow 48P \leq \frac{4}{7} \left(\frac{7}{4}t^2 \right) (23 - 4t^2) - 36 \leq \frac{4}{7} \left(\frac{\frac{7}{4}t^2 + 23 - 4t^2}{2} \right)^2 - 36$	
	$\Rightarrow 48P \leq \frac{4}{7} \left(\frac{23-9}{2} \right)^2 - 36$	
	$\text{Max}P = -\frac{1}{6} \text{ khi } a = b = 1$	0.25đ

Lưu ý:

- Câu 4: Nếu thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai hình thì không chấm điểm.
- Điểm bài thi làm tròn đến 0,25.
- Nếu thí sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.