

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x-3\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = AB$ nhận giá trị nguyên.

Bài II (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ô tô dự định đi quãng đường từ A đến B dài 120km với vận tốc không đổi. Khi đi được một nửa quãng đường, ô tô dừng lại vì bị chắn bởi tàu hỏa mất 3 phút. Vì vậy để đến B đúng thời gian dự định, ô tô phải tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định của ô tô.

2) Một hộp sữa Ông Thọ có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao. Biết thể tích của hộp sữa là $192\pi\text{cm}^3$. Tính diện tích vỏ hộp sữa (kể cả hai nắp hộp).



Bài III (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x} - \frac{y}{y+1} = 2 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$.

a) Chứng minh với mọi giá trị của m , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

b) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + mx_2 = 4$.

Bài IV (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cùng đi qua trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC . Đường thẳng MN cắt BE tại điểm P . Gọi S, G lần lượt là giao điểm của EF, MN với đường thẳng BC .

1) Chứng minh bốn điểm A, M, D, N cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh tứ giác $BMPD$ là tứ giác nội tiếp và tứ giác $DPEN$ là hình chữ nhật.

3) Gọi K là điểm đối xứng với D qua A , và L là hình chiếu vuông góc của D lên SK . Chứng minh G là trung điểm của đoạn thẳng SD và trung điểm của đoạn thẳng DL nằm trên đường tròn (O) .

Bài V (0,5 điểm) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 - ab + b^2$.

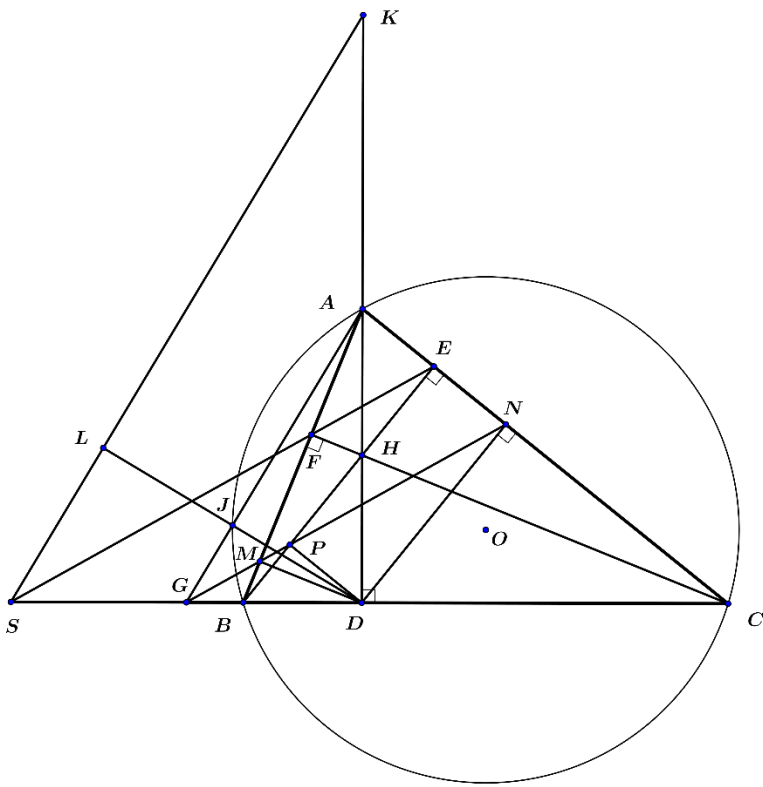
----- HẾT -----

Ghi chú:

- Học sinh không sử dụng tài liệu, không trao đổi khi làm bài;
- Giáo viên làm nhiệm vụ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên học sinh: Số báo danh: Trường THCS.....

Bài	Nội dung	Điểm
Bài I (2,0 điểm)	1) 0,5 điểm	
	Thay $x = 16$ (tmđk) vào A , ta được $A = \frac{\sqrt{16}-1}{2\sqrt{16}} = \frac{4-1}{2.4} = \frac{3}{8}$	0,50
	2) 1,0 điểm	
	$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 3 + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \text{ (đpcm)}$	0,25
	3) 0,5 điểm	
	$P = AB = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}-3)} \Leftrightarrow 2P = \frac{\sqrt{x}-3+2}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-3}$	0,25
Bài II (2,5 điểm)	P nguyên $\Rightarrow 2P$ nguyên $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{1; 4; 16; 25\}$. Thay vào P ta được $x \in \{1; 25\}$	0,25
	1) 2,0 điểm	
	Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h; $x > 0$) Vận tốc của ô tô sau khi tăng tốc là $(x+2)$ (h)	0,25
	Thời gian dự định để ô tô đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x}$ (h)	0,25
	Thời gian ô tô đi nửa quãng đường đầu là $\frac{60}{x}$ (h)	0,25
	Thời gian ô tô đi nửa quãng đường còn lại là $\frac{60}{x+2}$ (h)	0,25
	Do ô tô bị dừng lại 3 phút $= \frac{1}{20}$ (h) và tăng vận tốc thì đến B đúng giờ, nên ta có phương trình: $\frac{60}{x} + \frac{60}{x+2} + \frac{1}{20} = \frac{120}{x}$	0,25
	Giải phương trình ta được: $x = -50$ (loại) $x = 48$ (tmđk)	0,50
	Vậy vận tốc dự định của ô tô là 48 (km/h)	0,25
	2) 0,5 điểm	
	Thể tích của hộp sữa là $V = \pi.R^2.h = \pi.\left(\frac{1}{3}h\right)^2.h = \pi.\frac{1}{9}.h^3 = 192\pi$ (cm ³)	0,25

	$\Rightarrow h = 12 \text{ (cm)} \Rightarrow R = 4 \text{ (cm)}$		
	Diện tích vỏ hộp sữa là $V_{tp} = \pi.R.h + 2\pi.R^2 = \pi.4.12 + 2\pi.4^2 = 80\pi cm^2$	0,25	
Bài III (2,0 điểm)	1) 1,0 điểm		
	ĐKXĐ: $x \geq 0; y \neq -1$. Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x} + \frac{1}{y+1} = 3 \end{cases}$	0,25	
	Đặt $a = \sqrt{x}; b = \frac{1}{y+1} (a \geq 0)$	0,25	
	$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ (tmđk)}$	0,25	
	$\Rightarrow x = 1; y = 0$ (tmđk). Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;0)$	0,25	
	2) a. 0,5 điểm		
	Xét phương trình hoành độ của (d) và $(P): x^2 = mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3 = 0 (*)$	0,25	
	b. 0,5 điểm		
	Có: $\Delta = m^2 + 12 \geq 0, \forall m$. Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt	0,25	
	Theo Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$. Từ $(*)$ $x_1^2 = mx_1 + 3$.	0,25	
Kết hợp với giả thiết ta được: $m(x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$	0,25		
Bài IV (3,0 điểm)	1) 1,0 điểm		
		Vẽ hình đúng đến ý 1)	0,25
		Ta có: $\widehat{AMD} = 90^0$ ($DM \perp AB$)	0,25
		$\widehat{AND} = 90^0$ ($DN \perp AC$)	
		$\Rightarrow \widehat{AMD} + \widehat{AND} = 180^0$	0,25
		Mà $\widehat{AMD}, \widehat{AND}$ là hai góc đối của tứ giác $AMDN$ $\Rightarrow$ tứ giác $AMDN$ nội tiếp $\Rightarrow A, M, D, N$ cùng thuộc một đường tròn.	0,25
	2) 1,0 điểm		
Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (BE, CF là đường cao) $\Rightarrow$ tứ giác $BEFC$; $AEHF$ nội tiếp	0,25		

	$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EFC}$ (cùng chắn $\widehat{EC}$); $\widehat{EFC} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn $\widehat{EH}$); $\widehat{EAH} = \widehat{NMD}$ (cùng chắn $\widehat{DN}$)	0,25
	Suy ra $\widehat{PMD} = \widehat{PBD} \Rightarrow$ tứ giác BMPD nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{BMD} = 90^\circ$ (cùng chắn $\widehat{BD}$) $\Rightarrow \widehat{DPE} = 90^\circ$ Mà $\widehat{PEN} = \widehat{END} = 90^\circ$ (gt). Suy ra tứ giác DPEN là hình chữ nhật	0,25
	3) 1,0 điểm	
	Ta có: $\widehat{SEB} = \widehat{MAD}$ (cùng chắn $\widehat{FH}$); $\widehat{MAD} = \widehat{MND}$ (cùng chắn $\widehat{MD}$) $\Rightarrow \widehat{SEB} = \widehat{GND}$ (1). Mà $\widehat{EBS} = \widehat{NDG}$ ($DN // EB$) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta SBE \sim \Delta GDN$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{SB}{GD} = \frac{BE}{DN} = \frac{BE}{PE} = \frac{BS}{GS}$ (vì $PE = DN$; $GM // ES$) $\Rightarrow GD = GS \Rightarrow G$ là trung điểm của SD	0,25
	Gọi $AG \cap DL = \{J\} \Rightarrow DL \perp AG$ $\Rightarrow A, J, M, D, N$ cùng thuộc đường tròn $\Rightarrow GJ.GA = GM.GN$ (3). Mà tứ giác BFEC nội tiếp	0,25
	Lại có $EF // MN \Rightarrow$ tứ giác BMNC nội tiếp $\Rightarrow GM.GN = GB.GC$ (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow GJ.GA = GB.GB \Rightarrow J \in (O)$	0,25
Bài V (0,5 điểm)	Chứng minh $a^2 + b^2 - ab \leq 1$. Thật vậy: $(a+b)(a^2 + b^2 - ab) \leq a+b$ $\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + b^2 - ab) \leq (a+b)(a^5 + b^5)$ (Do $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$) $\Leftrightarrow a^6 + 2a^3b^3 + b^6 \leq a^6 + ab^5 + a^5b + b^6$	0,25
	$\Leftrightarrow ab(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ ($\forall a, b > 0$) (luôn đúng). Vậy $P_{\max} = 1$ khi $a = b = 1$	0,25