

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- Tính giá trị biểu thức A tại $x = 4$;
- Rút gọn biểu thức B ;
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II (2,0 điểm). Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người thợ cùng sơn một ngôi nhà, mất 4 ngày thì xong việc. Hai người cùng làm trong 1 ngày thì người thứ nhất có việc bận nên một mình người thứ hai làm trong 6 ngày nữa thì mới xong công việc. Hỏi mỗi người làm việc một mình thì sau bao lâu xong công việc?

Bài III (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - 2|y-3| = 4 \\ \frac{2}{x-2} + |y-3| = 5 \end{cases}$$

2) Trên mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): y = (2m+1)x - m^2 - m + 6$ và Parabol $(P): y = x^2$

- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 1$.
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho: $|x_1^2 - x_2^2| = 50$

Bài IV (3,5 điểm)

1) Cho một hình trụ có bán kính đáy là 3cm . Biết diện tích xung quanh của hình trụ là $90\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

2) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua trung điểm C của OA vẽ dây DE vuông góc với OA . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BD ($K \neq B, D$). H là giao điểm của AK và DE .

- Chứng minh tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AH.AK = AD^2$.
- Lấy điểm F trên đoạn KE sao cho $KF = KB$. Chứng minh tam giác KFB là tam giác đều. Xác định vị trí của điểm K trên cung nhỏ BD để tổng $KD + KB + KE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm)

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{1}{2}$ với a, b là các số dương.