

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 3x - 28$

b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

2. Cho biểu thức: $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$, với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị của x để $A = 2x$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau: $\frac{4}{(2x-1)(2x+3)} + \frac{6}{(2x+3)(2x+9)} + \frac{11}{(2x+9)(2x+20)} = \frac{7}{24}$

2. Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 6b + 2023c$

3. Tìm các số thực a và b sao cho đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - x - 2$.

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức $B = x^4 - x^2 + 2x + 2$ là số chính phương.

2. Với ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $Q = \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{2}$.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$; và $\angle AEF = \angle CED$.

b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua D. Giao điểm của EF với AM là N.
Chứng minh: $HN \cdot AD = AN \cdot DM$.

c) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh ba điểm I, D, K thẳng hàng.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng $1m$. Trong hình vuông đó đặt 55 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{9}m$. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bảy đường tròn ./.

..... Hết

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

UBND HUYỆN YÊN MÔ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM
KSCL HỌC SINH GIỎI

Môn: Toán 8

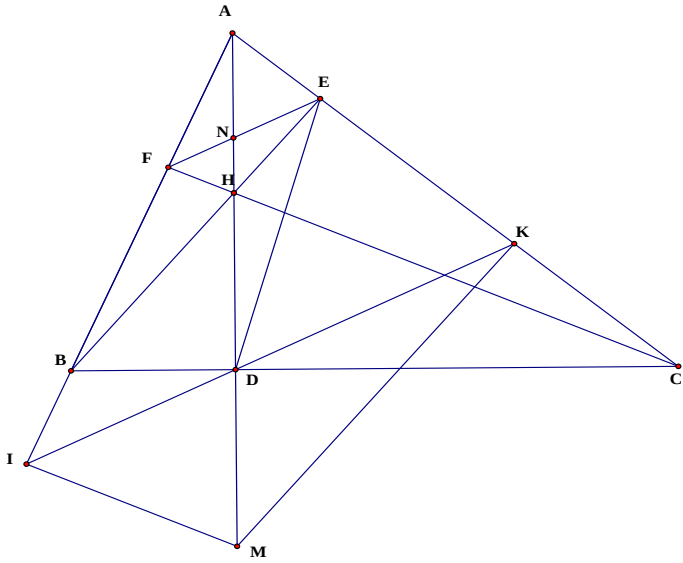
Năm học 2022 - 2023

(HDC gồm 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm)	1. (1,5 điểm)	
	Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:	
	a) $x^2 - 3x - 28$	
	$x^2 - 3x - 28 = x^2 - 7x + 4x - 28$	0,25
	$x(x - 7) + 4(x - 7) = (x - 7)(x + 4)$	0,25
	b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$	
	$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 6x + 1$	0,5
	$= (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) + 1$	0,25
	$= (x^2 + 3x - 1)^2$	0,25
	2. (3,5 điểm)	
	Cho biểu thức: $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$, với $x \neq 0; x \neq \pm 1$	
	a) Rút gọn A.	
	b) Tìm giá trị của x để $A = 2x$.	
	c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.	
	a) (2,0 điểm)	
	$A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0,5
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \right)$	0,5
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)}$	0,25
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1}$	0,25
	$= \frac{x^2}{x-1}$	0,25
	Vậy với $x \neq 0; x \neq \pm 1$ thì $A = \frac{x^2}{x-1}$	0,25
	b) (0,5 điểm)	
	với $x \neq 0; x \neq \pm 1$	0,25

	$A = 2x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 2x \Rightarrow x^2 = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = 2(tm) \end{cases}$. Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.	0,25
	c) (1,0 điểm).	
	$A = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$	0,25
	Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$ và x là số nguyên, để biểu thức A có giá trị nguyên thì $x-1$ là Ư(1) = {1; -1}	0,25
	$x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn ĐKXD)	0,25
	$x-1=-1 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa mãn) Vậy biểu thức A có giá trị nguyên khi $x=2$.	0,25
Câu 2 (4,0 điểm)	1 (1,5 điểm). Giải phương trình sau: $\frac{4}{(2x-1)(2x+3)} + \frac{6}{(2x+3)(2x+9)} + \frac{11}{(2x+9)(2x+20)} = \frac{7}{24}$	
	$\frac{4}{(2x-1)(2x+3)} + \frac{6}{(2x+3)(2x+9)} + \frac{11}{(2x+9)(2x+20)} = \frac{7}{24} \quad (1)$	
	ĐK: $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -\frac{9}{2}, x \neq -10$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+3}\right) + \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+9}\right) + \left(\frac{1}{2x+9} - \frac{1}{2x+20}\right) = \frac{7}{24}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+20} = \frac{7}{24} \Rightarrow 24(2x+20) - 24(2x-1) = 7(2x-1)(2x+20)$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 + 19x - 46 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+23) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & (TMĐKXD) \\ x=-\frac{23}{2} & (TMĐKXD) \end{cases}$	0,25
	Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{2; -\frac{23}{2}\right\}$	0,25
	2. (1,5 điểm)	
	Cho a, b, c là các số thỏa mãn điều kiện: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 6b + 2023c$	
	Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 3(a+b).c.(a+b+c) - 3ab(a+b+c) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$	
	$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c$	
	Mà $a+b+c=1$ nên $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.	0,25
	Vậy $P=5a+6b+2023c=\frac{5+6+2023}{3}=\frac{2034}{3}=678$.	0,25
	2 (1,0 điểm).	
	Tìm các số thực a và b sao cho đa thức $f(x)=x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2-x-2$.	
	Ta thực hiện phép chia: $\begin{array}{r} x^4-9x^3+21x^2+ax+b \\ x^4-x^3-2x^2 \\ \hline -8x^3+23x^2+ax+b \\ -8x^3+8x^2+16x \\ \hline -15x^2+(a-16)x+b \\ 15x^2-15x-30 \\ \hline (a-1)x+b-30 \end{array}$	0,5
	Vì đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x-2, Nên $(a-1)x+b-30=0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=30 \end{cases}$.	0,25
	Vậy $a=1$ và $b=30$ thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$	0,25
Câu 3 (4,0 điểm)		
	1. (2.0 điểm)	
	Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức $B=x^4-x^2+2x+2$ là số chính phương.	
	$\begin{aligned} x^4-x^2+2x+2 &= (x^4+2x^3+x^2)-(2x^3+4x^2+2x)+(2x^2+4x+2) \\ &= x^2(x^2+2x+1)-2x(x^2+2x+1)+2(x^2+2x+1) = (x+1)^2(x^2-2x+2) \end{aligned}$	0,5
	Vì $(x+1)^2, B$ là số chính phương suy ra x^2-2x+2 là số chính phương	0,25
	Đặt $x^2-2x+2=a^2 (a \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow a^2-(x^2-2x+1)=1$ $\Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1 \Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$	0,5
	Vì $a, x \in \mathbb{Z}$ nên: TH1: $\begin{cases} a-x+1=1 \\ a+x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x=0 \\ a+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1$	0,25
	TH2: $\begin{cases} a-x+1=-1 \\ a+x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x=-2 \\ a+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x=1$	0,25
	Vậy $x=1$ thì $B=4$ là số chính phương.	0,25

	2. (2,0 điểm)	
	Với ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{2}$.	
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm, ta có $2x^2 + y^2 + 5 = (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2(xy + x + 2)$, $6y^2 + z^2 + 6 = (4y^2 + z^2) + 2(y^2 + 1) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4(yz + y + 1)$, $3z^2 + 4x^2 + 16 = (z^2 + 4x^2) + 2(z^2 + 4) + 8 \geq 4zx + 8z + 8 = 4(zx + 2z + 2)$.	0,75
	Suy ra $\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} \leq \frac{x}{2(xy + x + 2)}$,	0,25
	Tương tự có $\frac{2y}{6x^2 + z^2 + 6} \leq \frac{y}{2(yz + y + 1)}$, $\frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{z}{zx + 2z + 2}$.	0,25
	Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ở trên theo vế, ta được $P \leq \frac{x}{2(xy + x + 2)} + \frac{y}{2(yz + y + 1)} + \frac{z}{zx + 2z + 2}$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{2z}{zx + 2z + 2} \right)$	0,25
	$= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{2z}{zx + 2z + xyz} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xy + x + 2} + \frac{2}{x + xy + 2} \right) = \frac{1}{2}$.	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1, z = 2$. Vậy GTLN của Q là 2 khi $x = y = 1, z = 2$.	0,25
Câu 4 (6,0 điểm)		
		0,25

a) (1,75 điểm).		
a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có : EAB chung $AEB = AFC (= 90^\circ)$ Do đó $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g.g)		0,5
$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$		0,25
Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có : BAC chung $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (vì $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$) Do đó $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c)		0,5
$\Rightarrow AEF = ABC$		0,25
Chứng minh tương tự ta được : $CED = CBA$. Do đó $AEF = CED$		0,25
b) (2,0 điểm).		
b) Vì $BEF + AEF = BED + CED = 90^\circ$ nên $BEF = BED$ $\Rightarrow EB$ là tia phân giác của góc DEF Tam giác NED có EH là tia phân giác của DEN nên: $\frac{HN}{HD} = \frac{EN}{ED}$ (1)		0,5
Vì $EA \perp EH$ nên EA là tia phân giác ngoài tại đỉnh E của $\triangle DEN$ $\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{EN}{ED}$ (2)		0,5
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HN}{HD} = \frac{AN}{AD}$, mà $HD = DM$ (Do M là điểm đối xứng của H qua D).		0,5
Nên $\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow HN \cdot AD = AN \cdot DM$		0,25
c) (2,0 điểm).		
a) $\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} = \frac{AN + HN}{AD + DM} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}$ $\triangle AMI$ có $HF // MI$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM}$ (định lí Ta lét),		0,25
Mà $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}$ nên $\frac{AF}{AI} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow FN // ID$ (định lí Ta lét đảo (3))		0,25
$\triangle AMK$ có $HE // MK$ (cùng $\perp AC$) $\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AM}$ (định lí Ta lét), $\triangle AIK$ có $\frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AK} \Rightarrow IK // FE$ (Định lí Ta lét đảo) (4) Từ (3) và (4) suy ra I, K, D thẳng hàng.		0,25
(1,0 điểm).		

	Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 1m. Trong hình vuông đó đặt 55 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{9}$ m. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bảy đường tròn.	
	Kẻ 9 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 10 hình chữ nhật có chiều rộng 0,1m .	0,25
	Vì đường kính của mỗi đường tròn lớn hơn 0,1m nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong chín đường thẳng vừa kẻ cắt.	0,25
	Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 6 đường tròn thì số đường tròn không vượt quá $9 \cdot 6 = 54$.	0,25
	Vì có 55 đường tròn nên ít nhất phải có một đường thẳng cắt 7 đường tròn.	0,25

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.