

Bài 1. (2,5 điểm). Phân tích đa thức thành nhân tử.

a) $3xy - 9x^2$

b) $x^3 + 343$

c) $25 - x^2 + 2xy - y^2$

Bài 2. (1,5 điểm) Thực hiện phép chia rồi tính giá trị biểu thức:

$$\left(\frac{3}{4}x^4y^2 - \frac{9}{2}x^3y^2 + 9x^2y^2 - 6xy^2 \right) : \left(\frac{3}{4}xy^2 \right) \text{ tại } x = 1 \text{ và } y = 2020$$

Bài 3. (2 điểm) Tìm x, biết:

a) $3(x-1)^2 + (x+5)(2-3x) = -25$

b) $(x-2)^2 - 4x + 8 = 0$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Điểm P đối xứng với điểm H qua đường thẳng BC. Điểm Q đối xứng với điểm H qua điểm M.

a) Chứng minh $PQ \parallel BC$. Khi đó, tứ giác DMQP là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác HCQB là hình bình hành. Tính số đo các góc $\widehat{ACQ}$; $\widehat{ABQ}$

c) Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm O cách đều 5 điểm A, B, P, Q, C.

Bài 5. (0,5 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x^2 + 4x + 1)^2 - 12(x + 2)^2 + 2093$$

Hết

(Giám thị không giải thích gì thêm)

Họ tên học sinh.....Số báo danh.....

Họ tên giám thị.....Chữ ký.....

Câu 1 Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $3xy - 9x^2$

b) $x^3 + 343$

c) $25 - x^2 + 2xy - y^2$

Lời giải

a) $3xy - 9x^2 = 3x(y - 3x)$

b) $x^3 + 343 = x^3 + 7^3 = (x + 7)(x^2 - 7x + 49)$

c) $25 - x^2 + 2xy - y^2 = 25 - (x - y)^2 = (5 + x - y)(5 - x + y)$

Câu 2 Thực hiện phép tính rồi tính giá trị biểu thức:

$$\left(\frac{3}{4}x^4y^2 - \frac{9}{2}x^3y^2 + 9x^2y^2 - 6xy^2 \right) : \left(\frac{3}{4}xy^2 \right) \text{ tại } x=1 \text{ và } y=2020$$

Lời giải

$$A = \frac{3}{4}x^4y^2 : \frac{3}{4}xy^2 - \frac{9}{2}x^3y^2 : \frac{3}{4}xy^2 + 9x^2y^2 : \frac{3}{4}xy^2 - 6xy^2 : \frac{3}{4}xy^2 \Leftrightarrow A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Với $x=1$; $y=2020$ ta có $A = 1^3 - 6.1^2 + 12.1 - 8 = -1$

Câu 3 Tìm x , biết:

a) $3(x-1)^2 + (x+5)(2-3x) = -25$

b) $(x-2)^2 - 4x + 8 = 0$

Lời giải

a) $3(x^2 - 2x + 1) + (-3x^2 - 13x + 10) + 25 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 - 13x + 10 + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow -19x + 38 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$

b) $(x-2)^2 - 4(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2).(x-2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2).(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \end{cases}$$

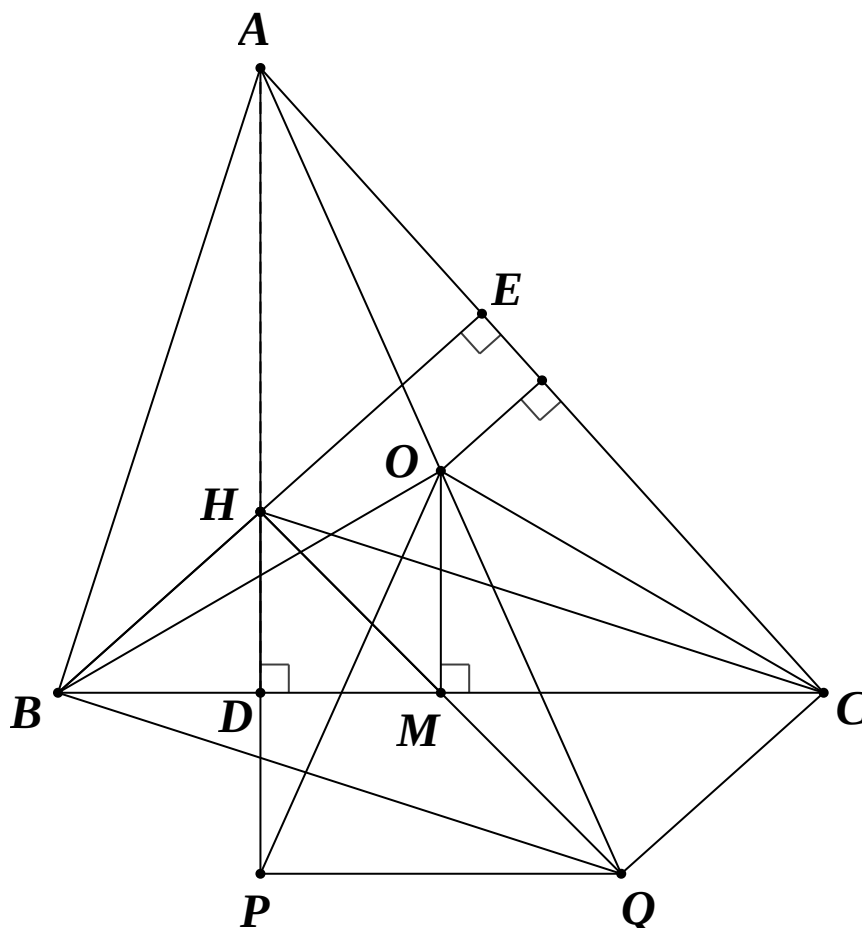
Vậy $x \in \{2; 6\}$

Câu 4 Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC .

qua
Điểm P đối xứng với điểm H qua đường thẳng BC . Điểm Q đối xứng với điểm H qua đường thẳng AC . Điểm M là trung điểm của BH .

- Chứng minh $PQ \parallel BC$. Khi đó tứ giác $DMQP$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh tứ giác $HCQB$ là hình bình hành. Tính số đo các góc $\widehat{ACQ}, \widehat{ABQ}$.
- Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng điểm O cách đều 5 điểm A, B, P, Q, C .

Lời giải



a) Chứng minh $PQ \parallel BC$. Khi đó tứ giác $DMQP$ là hình gì? Vì sao?

Có P đối xứng với H qua BC

Nên BC là trung trực của PH

$\Rightarrow BC \perp PH$ tại D và D là trung điểm của PH

Có điểm Q đối xứng với điểm H qua điểm M nên M là trung điểm của QH

Xét $\triangle HPQ$ có D là trung điểm của PH ; M là trung điểm của QH

Nên DM là đường trung bình của $\triangle HPQ$

$DM \parallel PQ$ hay $PQ \parallel BC$

Tứ giác $DMQP$ có $DM \parallel PQ$

Nên tứ giác $DMQP$ là hình thang ($DM \parallel PQ$)

Mà $\widehat{PDM} = 90^\circ$ (do $BC \perp PH$ tại D)

Vậy tứ giác $DMQP$ là hình thang vuông ($DM \parallel PQ$)

b) Chứng minh tứ giác $HCQB$ là hình bình hành. Tính số đo các góc $\widehat{ACQ}, \widehat{ABQ}$.

Xét tứ giác $HCQB$ có HQ và BC cắt nhau tại M là trung điểm của mỗi đường.

$\Rightarrow$ Tứ giác $HCQB$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \begin{cases} QC \parallel BH \\ QB \parallel CH \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} BH \perp AC \\ CH \perp AB \end{cases}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} QC \perp AC \\ QB \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACQ} = 90^\circ \\ \widehat{ABQ} = 90^\circ \end{cases}$$

c) Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng điểm O cách đều 5 điểm A, B, P, Q, C .

Gọi O' là trung điểm của AQ

Có $\triangle ABQ$ vuông tại B (do $\widehat{ABQ} = 90^\circ$)

Có BO' là trung tuyến

$$\text{Nên } BO' = \frac{1}{2}AQ$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } CO' = \frac{1}{2}AQ$$

$$\text{Mà } AO' = O'Q = \frac{1}{2}AQ \text{ (do } O' \text{ là trung điểm của } AQ)$$

$$\Rightarrow AO' = BO' = CO'$$

$\Rightarrow O'$ là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle ABC$

Mà O là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle ABC$

$\Rightarrow O'$ trùng với O .

$$\text{Có } PQ \parallel BC; BC \perp AP \Rightarrow PQ \perp AP$$

$$\Rightarrow \widehat{APQ} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle APQ$ vuông tại P

Có PO là trung tuyến

$$\text{Nên } PO = \frac{1}{2}AQ$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = OP = OQ \left(= \frac{1}{2}AQ \right)$$

Vậy điểm O cách đều 5 điểm A, B, P, Q, C .

Câu 5 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x^2 + 4x + 1)^2 - 12(x + 2)^2 + 2093.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = (x^2 + 4x + 1)^2 - 12(x + 2)^2 + 2093$$

$$\Rightarrow P = (x^2 + 4x + 1)^2 - 12(x^2 + 4x + 4) + 2093$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4x + 1$$

$$\Rightarrow P = t^2 - 12(t + 3) + 2093$$

$$\Rightarrow P = t^2 - 12t - 36 + 2093$$

$$\Rightarrow P = (t^2 - 2 \cdot 6 \cdot t + 36) + 2021$$

$$\Rightarrow P = (t - 6)^2 + 2021 \geq 2021$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2021 đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = 5$.