

Câu I (3 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+2y)(2y+1)(x+1)+2xy=20 \\ (3+xy)(2xy+2y+x)=20. \end{cases}$$

- 2) Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x^2}=2+|x-1|.$$

Câu II (3 điểm).

- 1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn

$$3x^2+8x+29=y(2x+y).$$

- 2) Với $x, y, z \geq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+y}+\sqrt[3]{1+z}-\sqrt[3]{1+x+y+z}.$$

Câu III (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm P di chuyển trên cung nhỏ AD . Gọi giao điểm của PB và PC với AD lần lượt là M và N ; giao điểm của PB và AC là Q ; giao điểm của PC và BD là R .

- 1) Chứng minh rằng $MR \perp NQ$.
- 2) Chứng minh rằng hai tam giác AMQ và DRN đồng dạng.
- 3) Gọi S là hình chiếu vuông góc của Q lên AB ; gọi T là hình chiếu vuông góc của R lên CD ; I là giao điểm của QR và ST . Chứng minh rằng đường thẳng PI luôn đi qua điểm cố định khi P thay đổi.

Câu IV (1 điểm). Xét 20 số $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{20} \leq 70$ nguyên dương. Chứng minh rằng trong các số hiệu $a_j - a_k$ ($1 \leq k < j \leq 20$) có ít nhất 4 số bằng nhau.

.....Hết