

Câu I (3 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy = 5 \\ x^3 + 8y^3 + 18(x + 2y) = 63. \end{cases}$$

- 2) Giải phương trình

$$x + 3\sqrt{6 - x - x^2} + 14 = 5\sqrt{2 - x} + 7\sqrt{x + 3}.$$

Câu II (3 điểm).

- 1) Với a, b nguyên, chứng minh rằng $a^2 + b^2$ chia hết cho 13 khi và chỉ khi $13 \mid 2a + 3b$ hoặc $13 \mid 2b + 3a$.
- 2) Với $a, b, c > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2 + 1}{b + c} + \frac{b^2 + 1}{c + a} + \frac{c^2 + 1}{a + b}.$$

Câu III (3 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác OAD tiếp xúc AD tại M . Đường tròn (J) nội tiếp tam giác OBC tiếp xúc BC tại N .

- 1) Chứng minh rằng hai điểm M và N đối xứng với nhau qua O .
- 2) Lấy điểm P khác O sao cho PA và PD cùng tiếp xúc với (J) . Chứng minh rằng

$$PA - PD = NC - NB.$$

- 3) Gọi S là trung điểm AD . Chứng minh rằng OS đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác PAD .

Câu IV (1 điểm). 2005 số nguyên dương có tổng bằng 7022 được viết xung quanh một đường tròn. Chứng minh rằng có tồn tại 2 cặp số kề liền mà tổng hai số của mỗi cặp lớn hơn hoặc bằng 8.

.....Hết