

Câu I (3 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 9 \\ (x + 2y)(2y + 1)(x + 1) = 18. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$x + \sqrt{x+3} = 3 + 3\sqrt{1-x}.$$

Câu II (3 điểm).

1) Tìm x, y, z nguyên dương thỏa mãn

$$x + xy + xyz = 31, \quad x < y < z.$$

2) Với $a, b, c > 0, a + b + c \leq \frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}.$$

Câu III (3 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác góc $\angle BAC$. Các điểm M, N thuộc (O) sao cho $CM \parallel BN \parallel AD$.

1) Chứng minh rằng $AM = AN$.

2) Gọi giao điểm của BM với AC là E ; giao điểm của CN với AB là F . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh rằng các đường thẳng MF, NE và AD đồng quy.

Câu IV (1 điểm). Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\frac{a}{a+b}} + \sqrt[4]{\frac{b}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt[4]{2}}.$$

.....Hết