

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày kiểm tra: 17 tháng 01 năm 2021

Câu I(1,5 điểm). Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1) $y = \frac{2x+1}{x^2-x}$

2) $y = \sqrt{2x+5} + \frac{3x}{\sqrt{1-x}}$

Câu II (1,5 điểm). Cho hàm số $y = x^2 - 2mx - m - 2$ có đồ thị (P) .

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để (P) giao đường thẳng $d: y = 2x + 1$ tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O với O là gốc tọa độ.

Câu III(2,0 điểm). Giải các phương trình sau:

1) $(x+1)|x-2| = 3x-1$

2) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = 4$

Câu IV(1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + x + 2y - 2 = 0 \\ \sqrt{3x^2 + x + 7y + 12} - 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + 2x + y - 7} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu V(2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(1;-1), B(3;2), C(-1;4)$

1) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính độ dài trung tuyến AM của $\triangle ABC$.

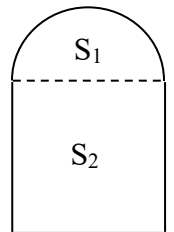
2) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

Câu VI(1,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 4, AC = 6$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Biểu diễn $\overrightarrow{GK}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và tính $\cos(\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{BC})$.

Câu VII(1,0 điểm).

1) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m - 3 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx - 1 + m = 0\}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2020; 2021)$ để $A \cap B = \emptyset$.

2) Một người cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là 8 (là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là đường kính của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của cửa hình chữ nhật để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



----- HẾT -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm
I (1,5 điểm)	Tìm tập xác định của các hàm số sau: 1) $y = \frac{2x+1}{x^2-x}$ 2) $y = \sqrt{2x+5} + \frac{3x}{\sqrt{1-x}}$	
	1) Đkxđ: $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	0,5
	Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$	0,25
	2) Đkxđ: $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x < 1 \end{cases}$. Vậy TXĐ: $D = \left[-\frac{5}{2}; 1\right)$	0,75
II (1,5 điểm)	1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (P): $y = x^2 - 2x - 3$	
	+ TXĐ: $\mathbb{R}$, Khoảng đồng biến, nghịch biến	0,25
	+ Bảng biến thiên	0,25
	+ Định, trục đối xứng, giao các trục hoặc bảng điểm.	0,25
	+ Vẽ đồ thị đúng, đẹp.	0,25
	2) Tìm m để (P) giao đường thẳng d: $y = 2x + 1$ tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O với O là gốc tọa độ?	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 - 2(m+1)x - m - 3 = 0$ (1). Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$ Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = -m - 3 \end{cases}$	0,25
	Gọi $A(x_1; 2x_1 + 1)$, $B(x_2; 2x_2 + 1)$ Tam giác OAB vuông tại O nên $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow 5x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -5m - 15 + 4m + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -10$	0,25
III (2,0 điểm)	1) Giải phương trình: $(x+1) x-2 = 3x-1$.	
	TH1: $x \geq 2$ PT $\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 3x-1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} (TM) \end{cases}$	0,5
	TH2: $x < 2$ PT $\Leftrightarrow (x+1)(2-x) = 3x-1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (TM) \\ x = -3 (TM) \end{cases}$	0,25
	Vậy phương trình có ba nghiệm $x = 2 + \sqrt{5}$, $x = -3$; $x = 1$.	0,25
	2) Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = 4$.	

	Điều kiện : $x \geq \frac{2}{3}$	0,25
	PT $\Leftrightarrow 3x - 2 + x + 2 + 2\sqrt{(3x-2)(x+2)} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 4x - 4} = 8 - 2x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 3x^2 + 4x - 4 = 64 - 32x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 36x + 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 34 \end{cases} \end{cases}$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.	0,5
IV (1,0 điểm)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + x + 2y - 2 = 0(1) \\ \sqrt{3x^2 + x + 7y + 12} - 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + 2x + y - 7}(2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$	
	Với điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 + x + 7y + 12 \geq 0 \\ x^2 + 2x + y - 7 \geq 0 \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow x^2 + (y+1)x + 2y - 2 = 0$ $\Delta = (y+1)^2 - 4(2y-2) = y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-y-1+y-3}{2} = -2 \text{ (loại)} \\ x = \frac{-y-1-y+3}{2} = -y+1 \end{cases}$	0,25
	Với $x = 1 - y \Rightarrow y = 1 - x$ thế vào (2) ta được: $\sqrt{3x^2 - 6x + 19} - 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + x - 6}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 19}$ (điều kiện $x \geq 2$) $\Leftrightarrow 6\sqrt{(x-1)(x^2 + x - 6)} = 2x^2 - 16x + 34$	0,25
	$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x - 3)} = x^2 - 8x + 17$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x - 3)} = (x^2 + 2x - 3) - 10(x-2)(3)$ Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases}$ (ĐK $a > 0, b \geq 0$) ta có (3) trở thành $a^2 - 3ab - 10b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+2b)(a-5b) = 0$ PT ta có : $\begin{cases} a+2b=0 \text{ (loại)} \\ a-5b=0 \Leftrightarrow a=5b \end{cases}$ $a=5b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 23x + 47 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23+\sqrt{341}}{2} \Rightarrow y = \frac{-21-\sqrt{341}}{2} \\ x = \frac{23-\sqrt{341}}{2} \Rightarrow y = \frac{-21+\sqrt{341}}{2} \end{cases} \text{ (tm)}$ Kết luận, hệ có 2 nghiệm là $\left(\frac{23+\sqrt{341}}{2}; \frac{-21-\sqrt{341}}{2}\right); \left(\frac{23-\sqrt{341}}{2}; \frac{-21+\sqrt{341}}{2}\right)$	0,25
V (2,0 điểm)	Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $A(1;-1), B(3;2), C(-1;4)$	
	1) Chứng minh A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Tính độ dài trung tuyến AM của ΔABC	
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;3), \overrightarrow{AC} = (-2;5), \overrightarrow{BC} = (-4;2)$ Do $\frac{2}{-2} \neq \frac{3}{5}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ABC là tam giác.	0,5
	Ta có M là trung điểm BC nên $M(1;3); AM = \sqrt{(1-1)^2 + (3+1)^2} = 4$	0,5

	2) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.	
	* Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của ΔABC . Khi đó: $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} -4(a-1)+2(b+1)=0 \\ -2(a-3)+5(b-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{19}{8} \\ b=\frac{7}{4} \end{cases}$. Vậy $H\left(\frac{19}{8}; \frac{7}{4}\right)$	0,5
VI (1,0 điểm)	Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 4$, $AC = 6$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Biểu diễn $\overrightarrow{GK}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và tính $\cos(\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{BC})$.	
	Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$	0,5
	Mặt khác $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $BC = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$. $GK^2 = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{25}{144}AC^2 - \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{289}{36} \Rightarrow GK = \frac{17}{6}$	0,25
	$\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{5}{12}AC^2 = \frac{1}{3}4^2 + \frac{5}{12}6^2 = \frac{61}{3}$ $\cos(\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{BC}}{GK \cdot BC} = \frac{\frac{61}{3}}{2\sqrt{13} \cdot \frac{17}{6}} = \frac{61\sqrt{13}}{221}$	0,25
VII (1,0 điểm)	a) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m - 3 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx - 1 + m = 0\}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-2021; 2010)$ để $A \cap B = \emptyset$	
	TH1: $A = \emptyset$ thì $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ TH2: $B = \emptyset$ thì $x^2 - mx - 1 + m = 0$ vô nghiệm $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 < 0 \Rightarrow$ không tồn tại m .	0,25
	TH3: $\begin{cases} A \neq \emptyset; B \neq \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ycbt $\Leftrightarrow (1)$ và (2) có nghiệm và $\begin{cases} x^2 - 2x + m - 3 = 0(1) \\ x^2 - mx - 1 + m = 0(2) \end{cases}$ vô nghiệm	0,25
	Do (2) luôn có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = m - 1$ nên thay vào (1) ta có: $m \neq 0; m \neq 3; m \neq 4$. Kết hợp 3 TH ta có: $m \in \{-2019, \dots, -1, 1, 2, 5, \dots, 2020\}$. Vậy có 4037 giá trị m nguyên.	
	b) Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hcn, có chu vi là $8(m)$. Hãy xác định các kích thước của hcn để diện tích cửa sổ là lớn nhất?	
	Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx , tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $8 - \pi x$. Diện tích cửa sổ là: $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \frac{8 - \pi x - 2x}{2} = 8x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2$.	0,25
	Lập bảng biến thiên ta có S lớn nhất khi hay $x = \frac{8}{4 + \pi}$. Vậy $S_{\max}$ thì các kích thước của nó là: chiều dài bằng $\frac{8}{4 + \pi}m$; chiều rộng bằng $\frac{16}{4 + \pi}$	0,25

