

**Bài I (2,0 điểm):**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}$ ;  $B = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} - 7}{1 - x}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$ .

1) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 16$ .

2) Chứng minh rằng:  $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$ .

3) Tìm các giá trị x để  $\frac{4A}{B} \leq \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$ .

**Bài II (2,0 điểm):**

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Năm ngoái, hai xã sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 770 tấn thóc. Năm nay, xã A thu hoạch vượt mức 15%, xã B thu hoạch vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó cả hai xã thu hoạch vượt mức 133 tấn thóc so với năm ngoái. Hỏi năm ngoái mỗi xã thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

2) Một chiếc nón có đường kính đáy bằng 40cm, độ dài đường sinh là 30cm. Người ta dùng ba lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng để làm thành chiếc nón như vậy (lấy  $\pi \approx 3,14$ ) ?



**Bài III (2,5 điểm):**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{2y-1} = 3 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng

(d):  $y = -3x + m^2 + 1$

a) Chứng minh (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi  $x_1$ ;  $x_2$  lần lượt là hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm các giá trị của m để  $x_1 > x_2$  và  $|x_1| + 3|x_2| = 17$

**Bài IV (3,0 điểm):** Cho đường tròn (O), đường kính AB. Lấy điểm H trên đường kính AB (H khác O, A và B). Qua điểm H kẻ dây CD vuông góc với đường kính AB, lấy điểm E thuộc cung nhỏ BD (E khác B và D); AE cắt CD tại điểm F.

1) Chứng minh: Tứ giác BEFH nội tiếp.

2) Chứng minh:  $CD^2 = 4 \cdot AH \cdot HB$

3) Đường thẳng đi qua H song song với CE, cắt đường thẳng AE và BE lần lượt tại I và K. Gọi G là giao điểm của DE và IK, M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh:  $DI \perp AE$  và ba đường thẳng CI, MG, BE đồng quy.

**Bài V (0,5 điểm):** Với các số thực không âm a, b thỏa mãn  $a + b = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \sqrt{1 + 3a} + \sqrt{1 + 2023b}$ .

..... **Hết** .....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: .....Số báo danh: .....

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: ..... Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2: .....

## HƯỚNG DẪN CHẤM

| Bài        | Ý            | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm         |
|------------|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1<br>(2 đ) | 1<br>(0,5 đ) | Thay $x = 16$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức A<br>Tính được $A = 6$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25<br>0,25 |
|            | 2<br>(1 đ)   | $B = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} - 7}{1 - x}$ $B = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$ $B = \frac{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$                                                                                                                                                                                     | 0,25         |
|            |              | $B = \frac{x + 4\sqrt{x} - 5 - \sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$ $B = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25         |
|            |              | $B = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25         |
|            |              | $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25         |
|            | 3<br>(0,5 đ) | $\frac{4A}{B} \leq \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$ $\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \leq \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$ $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x} - 3} - \frac{4\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 3} \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 3} \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} - 3} \geq 0$ <p>TH1: <math>\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4</math> (thỏa mãn yêu cầu BT)</p> | 0,25         |
|            |              | <p>TH2: <math>x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4; x \neq 9</math></p> $\Rightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 > 0$ <p>Do đó</p> $\sqrt{x} - 3 > 0$ $\Rightarrow x > 9$ <p>Kết hợp ĐKXĐ được <math>x &gt; 9</math></p> <p>Kết hợp TH1, TH2, kết luận <math>x = 4</math> hoặc <math>x &gt; 9</math></p> <p><b>(Nếu HS chỉ ra <math>x &gt; 9</math> cho 0.25đ)</b></p>                                                                                                                              | 0,25         |

|              |                |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |      |
|--------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2<br>(2đ)    | 1<br>(1,5 đ)   | Gọi số tấn thóc mà xã A thu hoạch được trong năm ngoái là $x$ (tấn)<br>( $0 < x < 770$ )<br>Gọi số tấn thóc mà xã B thu hoạch được trong năm ngoái là $y$ (tấn) ( $0 < y < 770$ )                                                                                                | 0,25 |
|              |                | Do năm ngoái hai xã thu hoạch được 770 tấn thóc nên ta có phương trình: $x + y = 770$                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|              |                | Năm nay xã A thu hoạch vượt mức là $15\%x$ (tấn)<br>Năm nay xã B thu hoạch vượt mức là $20\%y$ (tấn)<br>Do hai xã thu hoạch vượt mức 133 tấn nên ta có phương trình:<br>$15\%x + 20\%y = 133$                                                                                    | 0,25 |
|              |                | Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 770 \\ 0,15x + 0,2y = 133 \end{cases}$<br>Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 420 \text{ (TM)} \\ y = 350 \text{ (TM)} \end{cases}$                                                                                   | 0,5  |
|              |                | Vậy năm ngoái xã A thu hoạch được 420 tấn thóc, xã B thu hoạch được 350 tấn thóc.                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|              | 2<br>(0,5 đ)   | Diện tích xung quanh của hình nón là:<br>$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 20 \cdot 30 = 600\pi \text{ (cm}^2\text{)}$                                                                                                                                                               | 0,25 |
|              |                | Diện tích lá cần dùng để làm nón là:<br>$S = 3.600\pi = 1800\pi \approx 5652 \text{ (cm}^2\text{)}$<br>Vậy diện tích lá cần dùng khoảng $5652\text{cm}^2$                                                                                                                        | 0,25 |
| 3<br>(2,5 đ) | 1<br>(1 đ)     | $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{2y-1} = 3 \end{cases} \quad (1) \text{ (ĐKXĐ: } x \geq 1, y \neq \frac{1}{2} \text{)}$                                                                                                                  | 0,25 |
|              |                | Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \geq 0 \\ \frac{1}{2y-1} = b \end{cases}, \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \quad (2)$<br>Giải hệ phương trình (2), ta được $\begin{cases} a = 1 \text{ (TM)} \\ b = 1 \end{cases}$             | 0,25 |
|              |                | Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \frac{1}{2y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (tm)} \\ y = 1 \text{ (tm)} \end{cases}$                                                                 | 0,25 |
|              |                | Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|              | 2a<br>(0,75 đ) | Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:<br>$x^2 + 3x - m^2 - 1 = 0 \text{ (1)}$<br>Xét $a.c = -m^2 - 1 < 0$ (với mọi $m$ do $m^2 \geq 0$ )<br>$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu với mọi $m$<br>Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m$ | 0,5  |
|              |                |                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |

|           |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |
|-----------|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|           | 2b<br>(0,75 đ)             | <p>Áp dụng hệ thức Viet <math>\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 1 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}</math></p> <p>PT (1) có hai nghiệm <math>x_1; x_2</math> trái dấu</p> <p>Mà <math>x_1 &gt; x_2 \Rightarrow x_2 &lt; 0 &lt; x_1 \Rightarrow \begin{cases}  x_1  = x_1 \\  x_2  = -x_2 \end{cases}</math></p> <p>Mà <math> x_1  + 3 x_2  = 17 \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 17</math></p> | 0,25 |
|           |                            | <p>Ta có:</p> $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 17 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|           |                            | <p>Mà <math>x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 1</math></p> $\Rightarrow -m^2 - 1 = -10$ $\Rightarrow m^2 = 9$ $\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$ <p>Kết luận</p>                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
| 4<br>(3đ) | Vẽ hình<br>đúng<br>đến ý 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|           | 1<br>(0,75đ)               | <p>Xét (O) đường kính AB có</p> $\widehat{AEB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$ $\Rightarrow \widehat{BEF} = 90^\circ$ <p>Mà <math>CD \perp AB</math> tại H</p> $\Rightarrow \widehat{BHF} = 90^\circ$ <p>Xét tứ giác BEFH có:</p>                                                                                                                              | 0,25 |

|           |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |              |
|-----------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|           |   | $\widehat{BHF} + \widehat{BEF} = 180^\circ$<br>Mà hai góc này ở vị trí đối nhau<br>$\Rightarrow$ Tứ giác BHFE nội tiếp đường tròn (dnhb)                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25<br>0,25 |
| 2<br>(1đ) |   | Xét (O;R) có dây $CD \perp$ đk AB tại H<br>$\Rightarrow$ H là trung điểm của CD (quan hệ giữa đường kính và dây).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25         |
|           |   | Xét (O) đường kính AB có:<br>$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)<br>Xét $\triangle ABC$ vuông tại C, có CH là đường cao<br>$\Rightarrow CH^2 = AH.HB$                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25<br>0,25 |
|           |   | Mà $CH = \frac{CD}{2}$<br>Nên $CD^2 = 4.AH.HB$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25         |
|           |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |              |
| 3<br>(1đ) | a | $HI // CE \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DCE}$ (2 góc đồng vị)<br>Xét (O; R) có: $\widehat{DAE} = \widehat{DCE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)<br>$\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DAI}$<br>Xét tứ giác DAHI có: $\widehat{DHI} = \widehat{DAI}$<br>Mà H, A là 2 đỉnh kề nhau<br>$\Rightarrow$ Tứ giác AHID nội tiếp (dnhb).                                                  | 0,25         |
|           |   | $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AID}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD)<br>Mà $\widehat{AHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$<br>$\Rightarrow DI \perp AE$                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25         |
|           |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |              |
|           |   | Xét (O;R) có $\widehat{DBE} = \widehat{DAE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)<br>Mà $\widehat{DAE} = \widehat{DHI}$ (cmt)<br>$\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{DBE}$<br>$\Rightarrow$ Tứ giác DHBK nội tiếp.<br>$\Rightarrow \widehat{DHB} + \widehat{DKB} = 180^\circ$<br>$\Rightarrow \widehat{DKB} = 90^\circ$                                                                                                                 | 0,25         |
|           | b | Xét tứ giác DIEK có: $\widehat{DIE} = \widehat{IEK} = \widehat{DKE} = 90^\circ$<br>$\Rightarrow$ Tứ giác DIEK là hình chữ nhật<br>$\Rightarrow$ IK và DE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.<br>$\Rightarrow$ G là trung điểm của IK.<br>Giả sử CI cắt BK tại N<br>NG cắt CE tại M'<br>Ta có: $IG // CM' \Rightarrow \frac{IG}{CM'} = \frac{NG}{NM'}$ (Hệ quả định lí Ta let)<br>$GK // M'E \Rightarrow \frac{GK}{M'E} = \frac{NG}{NM'}$ |              |

|             |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |      |
|-------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|             |  | $\Rightarrow \frac{IG}{CM'} = \frac{GK}{M'E}$ <p>Mà <math>IG = GK</math> (G là trung điểm IK)</p> $\Rightarrow CM' = M'E$ <p><math>\Rightarrow M'</math> là trung điểm của CE</p> <p><math>\Rightarrow M</math> trùng <math>M'</math></p> <p><math>\Rightarrow M, G, N</math> thẳng hàng</p> <p>Vậy CI, MG, BE đồng quy</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
| 5<br>(0,5đ) |  | <p>Ta có: <math>1 + 2023b = (1 + 3b) + 2020b \geq 1 + 3b</math> vì <math>b \geq 0</math></p> $\Rightarrow \sqrt{1 + 2023b} \geq \sqrt{1 + 3b}$ <p>Do đó: <math>P \geq \sqrt{1 + 3a} + \sqrt{1 + 3b}</math></p> <p>Vì <math>\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^2 \leq b \end{cases}</math></p> $P \geq \sqrt{1 + 3a} + \sqrt{1 + 3b} = \sqrt{a + 2a + 1} + \sqrt{b + 2b + 1} \geq \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{b^2 + 2b + 1}$ $= \sqrt{(a + 1)^2} + \sqrt{(b + 1)^2} = a + 1 + b + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ | 0,25 |
|             |  | <p>Dấu "=" xảy ra <math>\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}</math></p> <p>Vậy <math>\min P = 3</math> đạt được khi <math>\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |

Lưu ý: HS làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.