

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm)

Chọn phương án trả lời đúng cho các câu hỏi sau:

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

Câu 2. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$. Giá trị $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$ bằng

- A. 5. B. -5. C. -1. D. 1.

Câu 3. Giá trị $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

- A. $L = \frac{19}{18}$. B. $L = \frac{1}{18}$. C. $L = +\infty$. D. $L = \frac{1}{19}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{100} = 496$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. -5. B. 6. C. $\frac{99}{20}$. D. 5.

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- A. BC . B. AB . C. AC . D. OA .

Câu 6. Xác định x là số thực dương để $2x-3; x; 2x+3$ lập thành cấp số nhân.

- A. $x = 3$. B. $x = \sqrt{3}$. C. $x = \pm\sqrt{3}$. D. $x \in \emptyset$.

Câu 7. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Hình chóp $S.ABC$ có tất cả bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

- A. $-\infty$. B. $\frac{3}{16}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 9. Ông Sơn trồng cây trên một mảnh đất hình tam giác theo quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ..., ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng ông đã trồng hết 11325 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

- A. 148. B. 150. C. 152. D. 154.

Câu 10. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

- A. 1. B. Vô số. C. 3. D. 2.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 12. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tổng $S = a^2 + b^2$ bằng

- A. $S = 1$. B. $S = 10$. C. $S = 5$. D. $S = 4$.

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm) Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020n + 2}{n^2 - n + 1}$. b) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 4)$. c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_{20} = 8u_1 \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đã cho.

b) Tính tổng $S_{2021} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2021}}$.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa SA và $(ABCD)$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD . Tính độ dài đoạn MN .

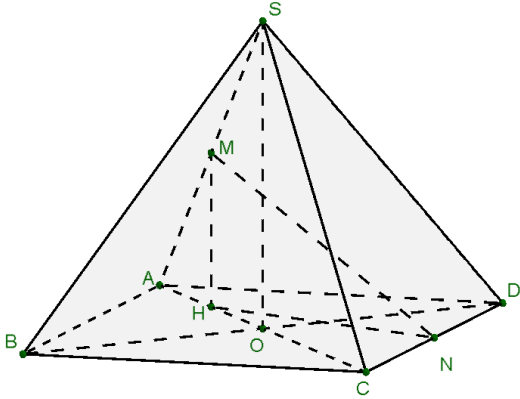
===== HẾT =====

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm)

Câu	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Đáp án	B	C	A	D	A	B	D	A	B	A	A	C

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020n + 2}{n^2 - n + 1}$.	1,0 điểm
		$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020n + 2}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2020}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$	1,0 điểm
	b)	$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 4)$.	1,0 điểm
		$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 4) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$	1,0 điểm
	c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.	1,0 điểm
		$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$.	0,5 điểm
		$= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$	0,5 điểm
2	Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$.		1,0 điểm
	a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đã cho.		
		Gọi u_1 & q lần lượt là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) Số hạng tổng quát của CSN là: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases} u_1 \cdot q^{19} = 8u_1 \cdot q^{16} \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 272 \end{cases}$	0,5 điểm
		$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1(1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}$	0,5 điểm
	b)	Tính tổng $S_{2021} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2021}}$.	0,5 điểm

3	Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 16 \cdot 2^{n-1} (\forall n \in \mathbb{N}^*)$		
	$S_{2021} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 2^1} + \frac{1}{16 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{16 \cdot 2^{2020}} = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} \right)$ Xét tổng $P = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}$	0,25 điểm	
	Nhận thấy các số hạng của tổng P là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1 và công bội bằng $\frac{1}{2}$ nên tổng của 2021 số hạng bằng $P = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2020}}. \text{ Vậy } S_{2021} = \frac{1}{16} \left(2 - \frac{1}{2^{2020}} \right) = \frac{2^{2021} - 1}{2^{2024}}$ Cách khác: Nhân cả hai vế của P với 2 ta được $2P = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{2019}}$ $2P - P = 2 - \frac{1}{2^{2020}} \Leftrightarrow P = 2 - \frac{1}{2^{2020}}$ $S_{2021} = \frac{1}{16} \left(2 - \frac{1}{2^{2020}} \right) = \frac{2^{2021} - 1}{2^{2024}}$		0,25 điểm
	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.		1,0 điểm
	 (Ghi chú: học sinh vẽ hình sai trừ 0,5 điểm)		
Xét $\triangle SAC$ có $SA = SC$ nên tam giác đó cân tại $S \Rightarrow SO \perp AC$ (1)		0,5 điểm	
Tương tự $\triangle SBD$ cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$ (2)		0,5 điểm	
Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$		0,5 điểm	
b) Tính góc giữa SA và $(ABCD)$.		1,0 điểm	
Theo câu a) ta chứng minh được $SO \perp (ABCD)$. Suy ra hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AO Do đó góc giữa SA và $(ABCD)$ là góc SAO.		0,5 điểm	

	Xét ΔSAC cân tại S, SO là đường cao, do đó $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$ Xét ΔSOA có $\tan SAO = \frac{SO}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow SAO = 60^\circ.$	0,5 điểm
	c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD . Tính độ dài đoạn MN .	0,5 điểm
	Gọi H là trung điểm của AO và M là trung điểm của SA. Suy ra $MH // SO$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$ Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD).$	0,25 điểm
	Xét ΔCNH có $NH^2 = CH^2 + CN^2 - 2CH.CN.\cos NCH = \frac{5a^2}{8}$ Xét ΔMNH có $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \frac{5a^2}{8}} = a.$	0,25 điểm