

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

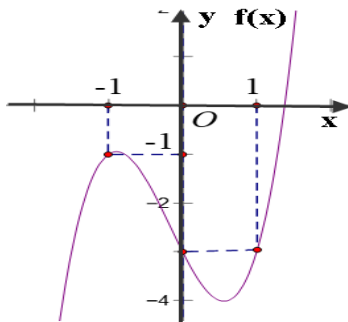
Câu I: (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{5-x} = 3x^2 - 4x - 1$ trên tập số thực.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$ (với $x, y \in \mathbb{R}$).

Câu II: (3,0 điểm)

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ



1) Tìm hàm số $f(x)$.

2) Phương trình $f(x^2 - 2x) = -2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực.

Câu III: (4,0 điểm)

1) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$.

2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1 = 4; u_2 = 5$ và $u_{n+2} = u_n^2 - (n+1)u_{n+1}$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Tính u_3 và u_4 . Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số trên.

Câu IV: (3,0 điểm)

1) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$?

2) Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm chia hết cho 10?

Câu V: (5,0 điểm)

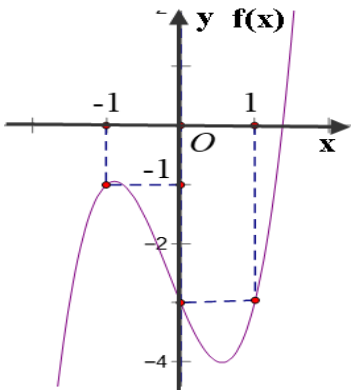
1). Trong mặt phẳng Oxy, biết một cạnh tam giác có trung điểm là $M(-1;1)$; hai cạnh kia nằm trên các đường thẳng $2x + 6y + 3 = 0$ và $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Hãy viết phương trình tham số của cạnh thứ ba của tam giác đó?

2). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}, AB = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC .

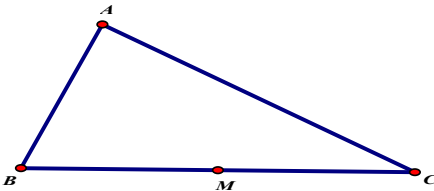
.....**HẾT**.....

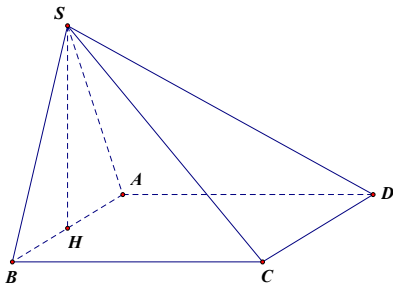
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay
Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.1 (2,0 điểm)	1) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{5-x} = 3x^2 - 4x - 1$ trên tập số thực.	2,0
	Điều kiện: $-1 \leq x \leq 5$.	0,25
	Ta có $(x-1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{5-x} = 3x^2 - 4x - 1$ $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x+1} - (x-1) + 2x - x\sqrt{5-x} = 3x^2 - 3x$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x+1} - 1) + x(2 - \sqrt{5-x}) - 3x^2 + 3x = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x(x-1)}{2+\sqrt{5-x}} - 3x(x-1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x(x-1) = 0 \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{5-x}} - 3 = 0 \end{cases}$	0,25
	Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (nhận).	0,25
	Do $\sqrt{x+1}+1 \geq 1$ và $2+\sqrt{5-x} \geq 2$ nên $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{5-x}} < 2$.	0,25
	Do đó $g(x) < 0, \forall x \in [-1; 5]$. Do đó, phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.	0,25
Câu I.2 (3,0 điểm)	2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$ (với $x, y \in \mathbb{R}$).	3,0
	Ta có $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0 \\ 3x^2 + 6y^2 - 3x - 12y = 0 \end{cases}$.	0,25
	Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai theo vế, ta được: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (y-2)^3 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x-1 = 2-y$	0,25
	$\Leftrightarrow y = 3-x$	0,25
	Thay $y = 3-x$ vào (2), ta có $x^2 - 3x + 2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ (nhận).	0,5
	Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.	0,5
Câu II.1 (1,25 điểm)	Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ  1) Tìm hàm số $f(x)$.	1,25

	Dựa vào hình vẽ $\Rightarrow$ Đồ thị đi qua 3 điểm: $(-1; -1)$, $(0; -3)$ và $(1; -3)$	0,25
	Ta có hệ : $\begin{cases} -a + b + 3 + d = -1 \\ d = -3 \\ a + b - 3 + d = -3 \end{cases}$	0,5
	Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ d = -3 \end{cases}$	0,25
	Vậy $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 3$	0,25
Câu II.2 (1,75 điểm)	2) Phương trình $f(x^2 - 2x) = -2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực.	1,75
	Hoành độ giao điểm 2 đồ thị $y = f(x^2 - 2x)$ và $y = -2$ là nghiệm của phương trình : $f(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a \in (-2; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (1; 2) \end{cases} \quad (*)$	0,5
	Xét: $x^2 - 2x = m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$	0,5
	Từ (*) $\Rightarrow$ Phương trình có 4 nghiệm phân biệt.	0,5
	Vậy $f(x^2 - 2x) = -2$ có 4 nghiệm phân biệt.	0,25
Câu III.1 (2,0 điểm)	1) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$.	2,0
	Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$ và $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.	0,5
	Khi đó $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.	0,5
	Ta có $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{4xy} + \frac{1}{4xy} + 4xy$ $\geq \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} + \frac{1}{4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} + 2$	0,25
	$\geq \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + 2 \geq 7.$	0,25
	Ta có $P = 7 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.	0,25
	Vậy $P_{\min} = 7$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức.	0,25
Câu III.2 (2,0 điểm)	2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1 = 4; u_2 = 5$ và $u_{n+2} = u_n^2 - (n+1)u_{n+1}$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Tính u_3 và u_4. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số trên.	2,0
	Ta có $u_3 = u_1^2 - 2u_2 = 4^2 - 2.5 = 6$ và $u_4 = u_2^2 - 3u_3 = 5^2 - 3.6 = 7$.	1,0
	Từ $u_1 = 4; u_2 = 5; u_3 = 6$ và $u_4 = 7$, ta dự đoán $u_n = n + 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n = n + 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	
	Thật vậy, ta có $u_1 = 4 = 1 + 3; u_2 = 5 = 2 + 3; u_3 = 6 = 3 + 3$ (đúng).	0,25

	Giả sử với $n = k \geq 3$. Ta có $u_k = k + 3$. Khi đó $u_{k-1} = k + 2$. Ta có $u_{k+1} = u_{k-1}^2 - k.u_k = (k + 2)^2 - k(k + 3) = k + 4 = (k + 1) + 3$. Vậy, mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Do đó, ta có $u_n = n + 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
		0,25
Câu IV.1 (1,5 điểm)	1) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$	1,5
	Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \leq q \leq p \leq n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là $T_p = C_{10}^p C_p^q (x^2)^{10-p} \left(\frac{1}{x}\right)^{p-q} (-1)^q = C_{10}^p C_p^q (-1)^q x^{20+q-3p}$	0,5
	Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20 + q - 3p = 0 \Leftrightarrow 3p - q = 20$.	0,25
	Mà $0 \leq q \leq p \leq n$ và $q, p, n \in \mathbb{N}$ nên $(p; q) \in \{(7; 1), (8; 4), (9; 7), (10; 10)\}$	0,25
	Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là	0,25
	$(-1)^1 C_{10}^7 C_7^1 + (-1)^4 C_{10}^8 C_8^4 + (-1)^{10} C_{10}^{10} C_{10}^{10} + (-1)^7 C_{10}^9 C_9^7 = 1951$	0,25
	Vậy Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là 1951	0,25
Câu IV.2 (1,5 điểm)	2) Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm chia hết cho 10?	1,5
	Gọi biến cố A: “Lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10” Số cách lấy ngẫu nhiên 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ: C_{30}^{10} cách $\Rightarrow \Omega = C_{30}^{10}$.	0,25
	Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ, 15 tấm thẻ mang số chẵn, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 (chú ý là các thẻ chia hết cho 10 đều là số chẵn) Số cách chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ: $C_{15}^5 = 3003$ cách. Số cách chọn 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10: $C_3^1 = 3$ cách Số cách chọn 4 tấm thẻ mang số chẵn không chia hết cho 10: $C_{12}^4 = 495$ cách	0,75
	Số cách lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ chia hết cho 10: $3003.3.495 = 4459455$ cách. $\Rightarrow \Omega_A = 4459455$	0,25
	Vậy $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{4459455}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}$.	0,25
Câu V.1 (2,5 điểm)	1). Trong mặt phẳng Oxy, biết một cạnh tam giác có trung điểm là $M(-1; 1)$; hai cạnh kia nằm trên các đường thẳng $2x + 6y + 3 = 0$ và $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Hãy viết phương trình tham số của cạnh thứ ba của tam giác đó?	2,5
		0,5

	Giả sử $AB: 2x + 6y + 3 = 0$, $AC: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$ và $M(-1;1)$ là trung điểm của cạnh BC. Do $M(-1;1)$ là trung điểm cạnh BC nên ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ y_B + y_C = 2 \end{cases} \quad (1).$	
	Điểm $B \in AB \Rightarrow 2x_B + 6y_B + 3 = 0 \quad (2).$	0,25
	Điểm $C \in AC \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 - t \\ y_C = t \end{cases} \quad (3).$	0,25
	Thế (3) vào (1) ta được: $\begin{cases} x_B + 2 - t = -2 \\ y_B + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -4 + t \\ y_B = 2 - t \end{cases} \quad (4)$	0,25
	Thế (4) vào (2) ta được: $2(-4 + t) + 6(2 - t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{4}.$	0,25
	Từ đây ta tìm được: $C\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right).$	0,25
	Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua $M(-1;1)$ nhận $\overrightarrow{MC} = \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$ làm vtcp	0,25
	nên có phương trình tham số là: $BC: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$	0,25
	Vậy phương trình tham số là: $BC: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$	0,25
Câu V.1 (2,5 điểm)	2). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}, AB = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD) bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC.	2,5
		0,25
	+ Gọi H là trung điểm AB. + $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases}$	0,25
	+ Hình chiếu của SD lên mp (ABCD) là DH $\Rightarrow$ Góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° $\Rightarrow \widehat{SDH} = 45^\circ$	0,25
	+ Xét tam giác AHD vuông tại A $\Rightarrow DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = 2a$	0,25
	+ Xét tam giác SDH vuông tại H và có $\widehat{SDH} = 45^\circ \Rightarrow DH = SH = 2a.$	0,25

	$+ d(SD, BC) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2.d(H, (SAD))$	0,5
	$\frac{1}{d^2(H, (SAD))} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}$ $\Rightarrow d^2(H, (SAD)) = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow d(H, (SAD)) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$	0,5
	$d(SD, BC) = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$	0,25

-- Hết --