

(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3,5 điểm)

Giải phương trình và bất phương trình:

a) $\sqrt{2x-7} = 1$.

b) $|x-1| = 3$.

c) $2x^2 - x \leq x(x+4) + 6$.

d) $\frac{1}{x} > \frac{2}{x-2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

a) Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

b) Tính $\sin \frac{5\alpha}{2}$.

Câu 3. (3,5 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 2)$, $B(4; 0)$ và trọng tâm $G\left(\frac{7}{3}; 1\right)$.

a) Tìm tọa độ đỉnh C . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC .

b) Viết phương trình đường tròn (T) tâm A và cắt đường thẳng BC tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn $MN = 2\sqrt{2}$.

c) Tính diện tích tứ giác $AOBC$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng

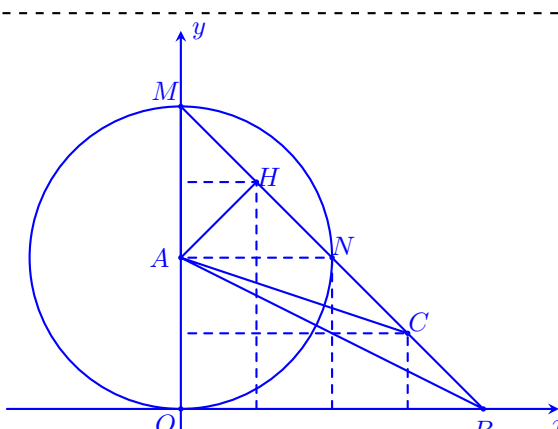
$$21(a^2 + b^2 + c^2) \geq 20 + 9(a^3 + b^3 + c^3).$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

(Hướng dẫn có 02 trang)

Câu	Lời giải	Điểm												
1.a		1,0												
	$\sqrt{2x-7}=1 \Leftrightarrow 2x-7=1 \Leftrightarrow x=4.$	1,0												
1.b		1,0												
	$ x-1 =3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}.$	1,0												
1.c		1,0												
	$2x^2-x \leq x(x+4)+6 \Leftrightarrow x^2-5x-6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 6.$	1,0												
1.d		0,5												
	$\frac{1}{x} > \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{x^2-2x} > 0.$ Bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = \frac{-x-2}{x^2-2x}$ như sau <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr></table> Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -2) \cup (0; 2).$	x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	$f(x)$		$+$	0	$-$		1,0
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$									
$f(x)$		$+$	0	$-$										
2.a		1,0												
	Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ nên $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$	0,5												
	Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$	0,5												
2.b		1,0												
	Ta có $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{25}.$	0,5												
	Ta lại có $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (do $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$). Tương tự ta tính được $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$ Vậy $\sin \frac{5\alpha}{2} = \sin \left(2\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{41\sqrt{5}}{125}.$	0,5												
3.a		1,5												

	Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 1 \end{cases} \Rightarrow C(3; 1).$	0,5
	Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 1)$ nên $\vec{n} = (1; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC .	0,5
	Phương trình của BC là $x + y - 4 = 0$.	0,5
3.b		1,0
	Gọi H là trung điểm của MN. Ta có $AH \perp MN$ và $AH = d(A, BC) = \frac{ 0 + 2 - 4 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$. Bán kính đường tròn (T) là $r = AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{AH^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 2$.	0,5
	 Đường tròn (T) có phương trình $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.	0,5
3.c		1,0
	Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 1$ (đvdt).	0,5
	$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 4$ (đvdt). Do đó, $S_{AOBC} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta OAB} = 5$ (đvdt).	0,5
4		1,0
	$21(a^2 + b^2 + c^2) \geq 20 + 9(a^3 + b^3 + c^3)$ Từ giả thiết ta có $a + b + c = 2$ Theo bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 2 \Rightarrow a < 1$. Tương tự ta chứng minh được $b < 1$ và $c < 1$. Do vậy $a, b, c \in (0; 1)$. Nhận thấy $(1 - a) \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ nên $-a^3 + \frac{7}{3}a^2 - \frac{16}{9}a + \frac{4}{9} \geq 0$ hay $21a^2 \geq 9a^3 + 16a - 4$	0,5
	Tương tự $21b^2 \geq 9b^3 + 16b - 4$; $21c^2 \geq 9c^3 + 16c - 4$ Từ đó suy ra $21(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a^3 + b^3 + c^3) + 20$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.	0,5