

Câu I (2,0 điểm).

1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 9$ và $xy = 4$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x^2 - y^2)}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}.$$

2. Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2023a = b^2 - 2023b = c$, với c là một số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2023}{c} = 0.$$

Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 7y^3 = (x+y)(7-2xy) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}.$$

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $xy^2 - y^2 + 2x = xy - x^2y - 2y + 1$.

2. Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a(ab+1):(a^2+b)$ và $b(ab+1):(b^2-a)$.

Câu IV (3,0 điểm). Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (M, N là các tiếp điểm và N thuộc cung nhỏ BC). Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và Q). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

1. Chứng minh rằng tứ giác $AMOI$ nội tiếp.

2. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHO . Chứng minh O, I, J thẳng hàng.

3. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại điểm E . Chứng minh P là trung điểm của đoạn thẳng ME .

Câu V (1,0 điểm). Cho 2023 hình chữ nhật có chiều rộng bằng 1 cm và chiều dài lần lượt bằng x_1 cm, x_2 cm, ..., x_{2023} cm. Biết rằng $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ là các số nguyên dương khác 1 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_{2023}}} \geq 88.$$

Chứng minh rằng trong 2023 hình chữ nhật này có ít nhất hai hình chữ nhật có diện tích bằng nhau.

..... **Hết**

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký giám thị 1:..... Chữ ký giám thị 2:.....

Hướng dẫn chung:

1) Nếu học sinh giải cách khác với cách nêu trong HDC này mà đúng thì vẫn được điểm tối đa của câu, ý tương ứng.

2) Trong câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai cơ bản thì không cho điểm câu đó.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I (2,0đ)	1 (1,0đ)	Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 9$ và $xy = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x^2 - y^2)}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}.$	
		Ta có $P = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x^2 - y^2)}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x - y)(x + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}$	0,5
		$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} = \frac{(x + y - 2\sqrt{xy})(x + y)}{(x + y - \sqrt{xy})} = \frac{(9 - 4).9}{9 - 2} = \frac{45}{7}.$	0,5
	2 (1,0đ)	Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2023a = b^2 - 2023b = c$, với c là một số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2023}{c} = 0.$	
		Theo bài ra ta có a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 2023x - c = 0$. Do đó theo Hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} a + b = 2023 \\ a.b = -c \end{cases}$.	0,5
II (2,0đ)	1 (1,0đ)	Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7$ (1)	
		Điều kiện: $x \geq 2$. Phương trình (1) có thể viết lại thành: $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x+5}.\sqrt{x-2}) = 7$	0,25
		Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+5} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} (a > b \geq 0)$ thì $a^2 - b^2 = 7$ và phương trình trên trở thành: $(a - b)(1 + ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(1 + ab - a - b) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (a - b)(1 - a)(1 - b) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} (do a > b)$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4(ktm) \\ x = 3(tm) \end{cases}$	
		Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.	0,25

	2 (1,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - 7y^3 = (x+y)(7-2xy) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.	
		Ta có $\begin{cases} 2x^3 - 7y^3 = (x+y)(7-2xy) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 7y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 7y^3 = x^3 + y^3 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8y^3 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 7y^2 = 7 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$	0,25
		Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = (-2; -1)$.	0,25
III (2,0đ)	1 (1,0đ)	Giải phương trình nghiệm nguyên $xy^2 - y^2 + 2x = xy - x^2y - 2y + 1$.	
		Ta có $xy^2 - y^2 + 2x = xy - x^2y - 2y + 1 \Leftrightarrow xy^2 - y^2 + 2x - xy + x^2y + 2y = 1$ $\Leftrightarrow (x^2y + xy^2) - (xy + y^2) + 2(x + y) = 1 \Leftrightarrow xy(x + y) - y(x + y) + 2(x + y) = 1$ $\Leftrightarrow (x + y)(xy - y + 2) = 1 \quad (1)$	0,5
		Vì đây là phương trình nghiệm nguyên nên ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy - y + 2 = 1 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} x + y = -1 \\ xy - y + 2 = -1 \end{cases} \quad (**) \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ -y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 2; y = -1 \end{cases}$ $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ (-1 - y)y - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ -y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ y = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 1 \\ x = 2; y = -3 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(0; 1), (2; -1), (-2; 1), (2; -3)\}$.	0,5
	2 (1,0đ)	Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn: $a(ab+1):(a^2+b)$ và $b(ab+1):(b^2-a)$.	
		Theo bài ra ta có: $(a^2 + b) a(ab+1) \Rightarrow (a^2 + b) b(a^2 + b) - a(ab+1) \Rightarrow (a^2 + b) (b^2 - a) \quad (1).$	0,25
		Lại có: $(b^2 - a) b(ab+1) \Rightarrow (b^2 - a) b(ab+1) - a(b^2 - a) \Rightarrow (b^2 - a) (a^2 + b) \quad (2).$ Từ (1) và (2) ta suy ra: $ a^2 + b = b^2 - a $. Ta xét hai trường hợp sau	0,25
		Trường hợp 1: $a^2 + b = b^2 - a \Leftrightarrow a^2 - b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b+1) = 0 \Leftrightarrow b = a+1$ (vì $a+b > 0$). Thay $b = a+1$ vào giả thiết ta thấy thỏa mãn.	0,25

		Trường hợp 2: $a^2 + b = -b^2 + a \Leftrightarrow a = a^2 + b^2 + b$. Vì a là số nguyên dương nên $a^2 \geq a$. Suy ra $a = a^2 + b^2 + b \geq a + b^2 + b > a$ nên trường hợp này loại. Vậy tất cả các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là: $(t; t+1)$ với t là số nguyên dương bất kì.	0,25
IV (3,0đ)	Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (M, N là các tiếp điểm và N thuộc cung nhỏ BC). Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và Q). Gọi I là trung điểm của BC.		
	1 (1,0đ)	Chứng minh rằng tứ giác $AMOI$ nội tiếp.	
		Do AM là tiếp tuyến với đường tròn tâm O nên $\widehat{AMO} = 90^\circ$. Do I là trung điểm của BC nên $IO \perp BC$. Suy ra $\widehat{AIO} = 90^\circ$.	0,5
		Tứ giác $AMOI$ có $\widehat{AMO} + \widehat{AIO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp (đpcm).	0,5
	2 (1,0đ)	Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHO. Chứng minh O, I, J thẳng hàng.	
		Ta có $\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC$ (vì $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$, $\widehat{CAN}$ chung) $\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$.	0,25
		Vì $\triangle ANO$ vuông tại N , đường cao NH nên $AH.AO = AN^2$. Suy ra $AB.AC = AH.AO$ hay $\frac{AB}{AH} = \frac{AO}{AK}$.	0,25
		Do đó $\triangle ABH \sim \triangle AOC$. Suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{AOC}$ hay $\widehat{ABH} = \widehat{HOC}$. Do đó tứ giác $CBOH$ nội tiếp.	0,25
		Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHO nên J cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CBOH$. Do đó J nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC hay O, I, J thẳng hàng (đpcm).	0,25
	3 (1,0đ)	Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.	

		Xét hai tam giác MHE và QDM, ta có: $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau). Lại có $\widehat{EDQ} = \widehat{MHD} + \widehat{HMD} = 90^0 + \widehat{HMD} = 90^0 + \widehat{FHD} = 90^0 + \widehat{PHE} = \widehat{EHM}$	0,25
		Suy ra ΔMHE đồng dạng ΔQDM (g.g) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$	0,25
		ΔPMH đồng dạng ΔMQH (g.g) $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{QH} = \frac{MH}{2DQ}$	0,25
		$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2 MP \Rightarrow P$ là trung điểm ME.	0,25
	Cho 2023 hình chữ nhật có chiều rộng bằng 1 cm và chiều dài lần lượt bằng x_1 cm, x_2 cm, $\dots$, x_{2023} cm. Biết rằng $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ là các số nguyên dương khác 1 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_{2023}}} \geq 88.$ Chứng minh rằng trong 2023 hình chữ nhật này có ít nhất hai hình chữ nhật có diện tích bằng nhau.		
V (1,0đ)		Giả sử trong 2023 hình chữ nhật đã cho không có hai hình chữ nhật nào có diện tích bằng nhau. Suy ra trong 2023 số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, ta sắp xếp các số đó như sau: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2023} \Rightarrow x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 4, \dots, x_{2023} \geq 2024$.	0,25
		$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_{2023}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}}$	0,25
		$= \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{2\sqrt{4}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{2024}}$	
	(1,0đ)	$< 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2024}} \right)$	0,25
		$= 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2024} - \sqrt{2023})$ $= 2(\sqrt{2024} - 1) < 88.$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_{2023}}} < 88$, vô lí. Do đó trong 2023 hình chữ nhật này có ít nhất hai hình chữ nhật có diện tích bằng nhau.	0,25

----- Hết -----