

Câu 1 (1,5 điểm). Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2022$.

a) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

b) Chứng minh rằng $P = (a + b)(b + c)(c + a) - 2abc$ chia hết cho 6.

Câu 2 (1,5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn $P(x) = Q(x) + Q(1-x)$ với mọi giá trị thực của x . Biết rằng các hệ số của $P(x)$ là những số nguyên không âm và $P(0) = 0$. Tính $P(P(3))$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tìm số nguyên x để số $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho 1003 số hữu tỷ khác 0, trong đó 4 số bất kỳ nào trong chúng cũng có thể lập thành một tỉ lệ thức. Chứng minh rằng trong các số đã cho có ít nhất 1000 số bằng nhau.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính $R = 3$ cm với $BC = 2$ cm và $AD = 4$ cm. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Gọi N là trung điểm của cạnh CD . Đường thẳng MN cắt AC tại P .

a) Tính tỉ số $\frac{CP}{PA}$.

b) Tính diện tích tứ giác $APND$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$ cắt nhau tại điểm K nằm trên đường chéo BD . Gọi M là trung điểm của BD , Q là giao điểm khác A của đường thẳng AM và đường tròn (O) . Đường thẳng qua C song song với AD cắt tia AM tại P . N là trung điểm của CP . Chứng minh rằng

a) Hai tam giác ABQ và ADQ có diện tích bằng nhau.

b) DN vuông góc với CP .