

Bài I. (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$;

2) Chứng minh: $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

3) Cho $P = A.B$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P| + P = 0$.

Bài II. (2,0 điểm)

1) **Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:**

Một ca nô xuôi dòng sông từ A đến B dài $48km$. Khi đến B , ca nô nghỉ 30 phút sau đó lại ngược dòng từ B về đến A . Tổng thời gian kể từ lúc ca nô đi từ A đến khi ca nô quay trở về A là 4 giờ 6 phút. Tìm vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là $3km/h$.

2) Một thùng tôn hình trụ có bán kính đáy $0,3m$ và chiều cao $0,7m$ đang chứa đầy nước. Tính thể tích nước trong thùng (Lấy $\pi \approx 3,14$, bỏ qua bề dày của vật liệu).

Bài III. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + 3\sqrt{y+1} = 5 \\ \frac{2}{x-3} - 5\sqrt{y+1} = -1 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 2$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

a) Chứng minh: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m ;

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho

$$\frac{x_1-2}{x_2+2} + \frac{x_2-2}{x_1+2} = 0.$$

Bài IV. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc tại O . Gọi I là trung điểm của OB . Tia CI cắt đường tròn (O) tại E . Gọi H là giao điểm của AE và CD .

1) Chứng minh: Tứ giác $OIED$ nội tiếp;

2) Chứng minh: $AH \cdot AE = 2R^2$ và $OA = 3.OH$;

3) Gọi K là hình chiếu của O trên BD , Q là giao điểm của AD và BE .

Chứng minh: Q, K, I thẳng hàng.

Bài V. (0,5 điểm) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 10x^2 + 10y^2 + z^2$$

ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài I (2,0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1) (0,5 điểm)	Thay $x = 9$ (TMĐK) vào biểu thức A, ta được: $A = \frac{\sqrt{9} - 2}{\sqrt{9} - 1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$ Vậy $A = \frac{1}{2}$ khi $x = 9$	0,25 0,25
2) (1,0 điểm)	Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có: $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2}{x - 1}$ $= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 1) + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$ $= \frac{x - \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1 + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$	0,25
	$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$	0,25
3) (0,5 điểm)	+) Ta có: $P = A.B$ $= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ $= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ +) Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có: $ P + P = 0$ $\Leftrightarrow P = -P$ $\Leftrightarrow P \leq 0$	0,25

	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ +) Kết hợp ĐKXD, ta có: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Mà x là số nguyên nên ta có: $x \in \{0; 2; 3; 4\}$	0,25
--	--	------

Bài II (2,0 điểm)

1 (1,5 điểm)	Gọi vận tốc riêng của ca nô là: x (km/h) (Điều kiện: $x > 3$)	0,25
	Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là: $x + 3$ (km/h)	
	Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là: $x - 3$ (km/h)	
	Thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B là: $\frac{48}{x+3}$ (giờ)	0,25
	Thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A là: $\frac{48}{x-3}$ (giờ)	
	Vì tổng thời gian cả hành trình là 4 giờ 6 phút = $\frac{41}{10}$ giờ (tính cả thời gian nghỉ là 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ) nên ta có phương trình: $\frac{48}{x+3} + \frac{48}{x-3} + \frac{1}{2} = \frac{41}{10}$ $\Leftrightarrow \frac{48(x-3) + 48(x+3)}{x^2-9} = \frac{36}{10}$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 80x - 27 = 0$	0,5
	Giải phương trình tìm được: $x = 27$ hoặc $x = -\frac{1}{3}$	0,25
	Đối chiếu với ĐKXD. Vậy vận tốc riêng của ca nô là: 27 km/h	0,25
2 (0,5 điểm)	Thể tích nước chứa trong thùng bằng thể tích của hình trụ. Thể tích nước chứa trong thùng là: $V = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,19782 (m^3)$	0,25
	Vậy thể tích nước chứa trong thùng khoảng 0,19782 m ³	0,25

Bài III (2,5 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (1,0 điểm)	Điều kiện: $x \neq 3; y \geq -1$ Đặt $\frac{1}{x-3} = a; \sqrt{y+1} = b$ hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 6b = 10 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 11b = 11 \\ 2a - 5b = -1 \end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x-3} = 2 \\ \sqrt{y+1} = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} (TM) \\ y = 0 (TM) \end{cases}$ Vậy $(x; y) = \left(\frac{7}{2}; 0\right)$	0,25
2) (1,5 điểm)	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $x^2 - (m+2)x + m - 2 = 0 \quad (1)$	0,25
	Tính được: $\Delta = (m+2)^2 - 4(m-2) = m^2 + 12$	0,25
	$\Delta > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m $\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .	0,25
	Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1) Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$ Điều kiện: $x_1 \neq -2; x_2 \neq -2 \Leftrightarrow (-2)^2 - (-2)(m+2) + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$	0,25
	$\frac{x_1 - 2}{x_2 + 2} + \frac{x_2 - 2}{x_1 + 2} = 0$ $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 8 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0$ $\Leftrightarrow m(m+2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (TM) \\ m = -2 (L) \end{cases}$ Vậy $m = 0$	0,25

Bài IV (3,0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
Hình vẽ		0,25
1)	+) Chứng minh: $\widehat{IOD} = 90^\circ$	0,25
(0,75 điểm)	+) Chứng minh: $\widehat{IED} = 90^\circ$	0,25
	+) Chứng minh: Tứ giác $CFBD$ nội tiếp	0,25
2)	+) Chứng minh: $\triangle AHO \sim \triangle ABE$	0,25
	+) Suy ra: $AH \cdot AE = AO \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$	0,5
	+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = \frac{AE}{BE}$	0,25
	+) Mà EI là tia phân giác của góc AEB nên suy ra:	0,25
	$\frac{AE}{BE} = \frac{AI}{IB} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{1}{2}R} = 3$	
	+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = 3 \Rightarrow OA = 3.OH$	0,25
3)	+) Chứng minh được: $OD = 3.OH \Rightarrow HD = \frac{2}{3}OD$	0,25
(0,5 điểm)	+) Suy ra: H là trọng tâm $\triangle ABD$	
	+) Chứng minh K là trung điểm của BD	
	Suy ra: A, H, K, E thẳng hàng	

	+) Suy ra: K là trực tâm của ΔABQ +) Suy ra: KQ vuông góc AB +) Chứng minh được: KI vuông góc AB +) Suy ra: Q, K, I thẳng hàng	0,25
--	---	------

Bài V (0,5 điểm)

+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $8x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{8x^2 \cdot \frac{z^2}{2}} = 4xz$ $8y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{8y^2 \cdot \frac{z^2}{2}} = 4yz$ $2(x^2 + y^2) \geq 4xy$	0,25
+) Từ đây, suy ra: $10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) = 4$	
+) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ 8x^2 = 8y^2 = \frac{z^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$	0,25

Chú ý: Các cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa

