

Câu 1 (2,0 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x(3 + x) = 4$

b)
$$\begin{cases} 2(x - 1) + y = 3 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức:

$$P = \left(2 + \frac{2\sqrt{x} - 4}{3 - 2\sqrt{x}} \right) : \left[\frac{3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right] \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}, x \neq 1)$$

b) Cho hàm số bậc nhất $y = (2m - 1)x + m^2 - 2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d). Tìm m để (d) cắt (d'): $y = x - 1$ tại điểm A có tung độ bằng 1.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Hai công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 10 giờ. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 6 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 3 giờ thì được 40% công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu hoàn thành công việc đó?

b) Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m nguyên dương để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 15$.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho AC là một dây khác đường kính của đường tròn (O), B là một điểm trên cung nhỏ AC sao cho $AB < BC$, kẻ dây BD của đường tròn (O) vuông góc với AC tại H. Kẻ BI vuông góc với CD (I thuộc CD)

a) Chứng minh bốn điểm B, H, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ BK vuông góc với đường thẳng AD (K thuộc AD). Chứng minh $\widehat{BHK} = \widehat{BCD}$ và ba điểm H, I, K thẳng hàng.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và HI. Chứng minh rằng $BN \perp MN$

Câu 5 (1,0 điểm).

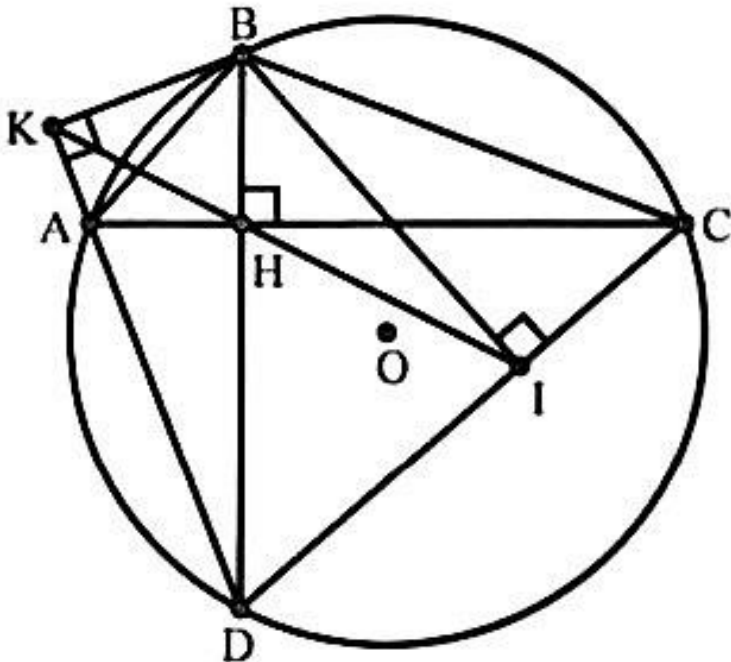
Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 \geq y^2 + z^2$.

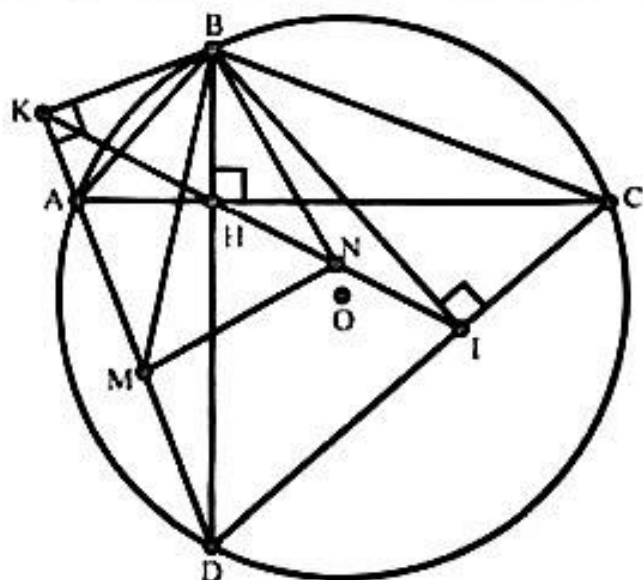
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^2}(y^2 + z^2) + x^2 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + 2018$.

————— Hết —————

Câu	Ý	Nội dung cần đạt	Điểm
Câu 1 (2,0đ)	a	$x(3+x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$. Ta có: $a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$ Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1; x_2 = -4$.	0,5 0,5
		$\begin{cases} 2(x-1) + y = 3 \\ x - 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$	0,5
	b	$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2.1 + y = 5 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 3)$	0,25
Câu 2 (2,0đ)	a	$P = \left(2 + \frac{2\sqrt{x}-4}{3-2\sqrt{x}} \right) : \left[\frac{3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right]$ $= \left(\frac{6-4\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}-4}{3-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ $= \frac{6-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}-4}{3-2\sqrt{x}} : \left(\frac{3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} \right)$ $= \frac{2-2\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}} : \frac{2x-2}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)}$ $= \frac{2(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-3} : \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} = 1$ Vậy $P = 1$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}, x \neq 1$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	Đề hàm số $y = (2m-1).x + m^2 - 2$ là hàm số bậc nhất $2m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$	0,25
		+ Điều kiện để (d) $y = (2m-1).x + m^2 - 2$ cắt (d'): $y = x - 1$ là: $2m-1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 1$	0,25
		+ Vì (d) cắt (d') : $y = x - 1$ tại điểm A có tung độ bằng 1 nên thay $y = 1$ vào (d') $\Rightarrow x = 2$	0,25

		$m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-1).(m+5) = 0$ $\Leftrightarrow m = 1; m = -5$. Do $m \neq 1; m \neq \frac{1}{2}$ nên $m = -5$ Vậy $m = -5$.	
Câu 3 (2,0đ)		Gọi x (giờ) là thời gian công nhân thứ nhất một mình làm xong công việc và y (giờ) là thời gian công nhân thứ hai một mình làm xong công việc. (Điều kiện: x; y > 10) Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).	0,25
		Vì cả hai công nhân làm xong công việc trong 10 giờ, do đó trong 1 giờ cả hai công nhân cùng làm được $\frac{1}{10}$ (công việc) nên ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ (1) Khi công nhân thứ nhất làm 6 giờ và công nhân thứ hai làm 3 giờ thì hoàn thành được 40% (công việc) nên ta có phương trình: $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5}$ (2) Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: (1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases}$	0,25
	a	Đặt $\frac{1}{x} = u > 0; \frac{1}{y} = v > 0$. Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} u + v = \frac{1}{10} \\ 6u + 3v = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u + 6v = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ 6u + 3v = \frac{2}{5} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3v = \frac{1}{5} \\ u + v = \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{15} \\ u = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30} \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK) $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{30} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK)	0,25
		Vậy thời gian để công nhân thứ nhất một mình làm xong công việc là 30 giờ và thời gian để công nhân thứ hai một mình làm xong công việc là 15 giờ	0,25
		$x^2 - 2x + m - 1 = 0$ Ta có: $\Delta' = 1 - (m - 1) = 2 - m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$	0,25

Câu 4 (3,0đ)	b	$2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 \quad (1)$	
		Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$	0,25
		$\text{Đề } x_1^3 + x_2^3 \leq 15$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \leq 15$ $\Leftrightarrow 8 - 3(m - 1) \cdot 2 \leq 15$ $\Leftrightarrow 8 - 6m + 6 \leq 15$ $\Leftrightarrow -6m \leq 1$ $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{6} \quad (2)$	0,25
		Kết hợp (1) và (2), ta có $-\frac{1}{6} \leq m \leq 2$ Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$	0,25
	a	Vẽ hình đúng câu 1	
			0,25
		Ta có $\widehat{BHC} = 90^\circ, \widehat{BIC} = 90^\circ$	0,25
		Suy ra H, I nằm trên đường tròn đường kính BC	0,25
		Do vậy 4 điểm B, H, I, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC	0,25
		Chứng minh được tứ giác BHAK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BAK} \quad (1)$	0,25
		Do ABCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BCD} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{BCD}$	0,25
		Do BHIC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IHD} = \widehat{BCD} \quad (3)$ Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{IHD}$	0,25
		Do đó $\widehat{IHB} + \widehat{BHK} = \widehat{IHB} + \widehat{IHD} = 180^\circ$ Suy ra ba điểm K, H, I thẳng hàng	0,25



C

Tứ giác BHIC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BIH}$

Tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BDA}$

$$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{BDA}$$

Có tứ giác BHIC và tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHI}$
(cùng bù với $\widehat{BCD}$)

0.25

Do đó $\triangle BHI \sim \triangle BAD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{HI}{AD} \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{2 \cdot HN}{2 \cdot AM} \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{HN}{AM}$$

0.25

Từ đó suy ra $\triangle BHN \simeq \triangle BAM \Rightarrow \widehat{BNH} = \widehat{BMA}$

$\Rightarrow$ tứ giác ANMK nội tiếp

Mà $\widehat{BKM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BNM} = 90^\circ$

Từ đó suy ra $BN \perp MN$

0.25

0.25

Câu 5
(1,0đ)

$$P = \frac{1}{x^2}(y^2 + z^2) + x^2 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + 2018 \geq \frac{y^2 + z^2}{x^2} + \frac{4x^2}{y^2 + z^2} + 2018$$

0.25

$$\Rightarrow P \geq \left(\frac{y^2 + z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2 + z^2} \right) + \frac{3x^2}{y^2 + z^2} + 2018$$

Do $\frac{y^2 + z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2 + z^2} \geq 2;$

$$x^2 \geq y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{y^2 + z^2} \geq 3$$

0,25

$$\Rightarrow P \geq 2 + 3 + 2018 = 2023$$

0.25

Dấu bằng xảy ra ra khi $x = y\sqrt{2} = z\sqrt{2}$

Vậy $\text{Min } P = 2023$ khi $x = y\sqrt{2} = z\sqrt{2}$

0.25